SECONDAIRE
Tle D
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

THEME : FONCTIONS NUMERIQUES

Durée : 12 heures **Code :**

Leçon 1 : Limites et continuité d'une fonction

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Les élèves de Terminale s'exercent à la photographie au sein du club photo du lycée. On les informe qu'en photographie, la profondeur de champ correspond à la zone de l'espace dans laquelle doit se trouver le sujet à photographier pour en obtenir une image que l'œil considérera nette.

En optique, pour que la netteté s'étende d'une distance a à une distance r, la mise au point doit être faite à la distance : $P = \frac{2ar}{a+r}$ (les distances sont exprimées en mètres).

Les élèves souhaitent que la netteté s'étende de «5m à l'infini ».

Un élève affirme alors que : $P = 10 - \frac{50}{5+r}$. Ce qui n'est pas de l'avis des autres.

Ensemble ils décident de vérifier cette formule et de faire des calculs pour déterminer la distance de mise au point à choisir quand l'objet s'éloigne.

B. CONTENU DE LA LEÇON

1. Limite d'une fonction composée

Propriété

Soit f et g deux fonctions numériques. a, b et ℓ sont des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = \ell$.

Exercice de fixation

1 Calcule la limite en $+\infty$ de la fonction h définie sur IR par : $h(x) = \sqrt{4 + \frac{2}{x^2+1}}$.

2. Calcule la limite en 0 de la fonction f définie sur IR* par : $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$.

Solution

1. $h(x) = g \circ f(x)$ *avec* $f(x) = 4 + \frac{2}{x^2+1}$ *et* $g(x) = \sqrt{x}$

Nous avons: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(4 + \frac{2}{x^2 + 1}\right) = 4$ *car* $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x^2 + 1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x^2}\right) = 0$

$et \ \lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$

$donc \ \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 2$.

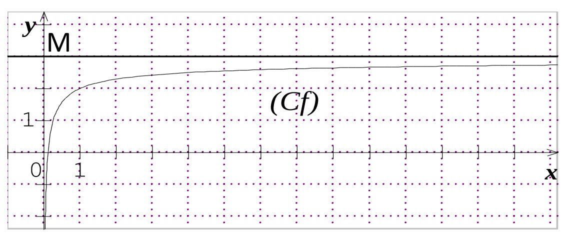
2. $f(x) = \frac{\sin 2x}{x} = 2 \times \frac{\sin(2x)}{2x} = u \circ v(x)$ où $v(x) = 2x \ et \ u(x) = 2 \times \frac{\sin x}{x}$

On a : $\lim\limits_{x \to 0} v(x) = \lim\limits_{x \to 0} 2x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} u(x) = \lim\limits_{x \to 0} 2 \times \frac{\sin x}{x} = 2$

$donc \ \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$.

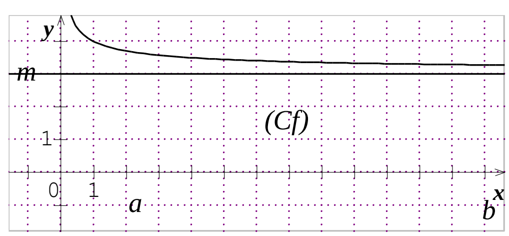
2. Limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert

Propriété 1



a et b sont des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ et f une fonction numérique.
Si f est croissante et majorée par un nombre réel M sur l'intervalle $]a, b[$ alors f admet une limite finie ℓ en b.
De plus $\ell \leq$ M.

Propriété 2



a et b sont des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ et f une fonction numérique.
Si f est décroissante et minorée par un nombre réel m sur l'intervalle $]a, b[$ alors f admet une limite finie ℓ en b.
De plus $\ell \geq$ m.

Exercice de fixation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
Sachant que : $\forall x \in [1 ;+\infty[$, on a : $f(1) \leq f(x) \leq -\frac{1}{x} + 1 + f(1)$.

Justifie que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ et donne un encadrement de ℓ.

Solution

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ *donc* f *est strictement croissante sur* $[1;+\infty[$,

$\forall x \in [1 ;+\infty[$, *on a :* $f(1) \leq f(x) \leq -\frac{1}{x} + 1 + f(1)$.

$\forall x \in [1 ; +\infty[$, $-\frac{1}{x} \leq 0$ *donc* $f(x) \leq -\frac{1}{x} + 1 + f(1) \leq 1 + f(1)$.
La fonction f *est croissante sur* $[1 ;+\infty[$ *et majorée par* $1 + f(1)$ *donc* f *admet une limite finie* ℓ *en* $+\infty$. *D'où :* $f(1) \leq \ell \leq 1 + f(1)$.

3. Branches paraboliques

Définition
Soit f une fonction numérique et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O,I,J)

- On dit que (C) admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction celle de (OI)** lorsque $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{f}(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{f}(x)}{x} = 0$,
- On dit que (C) admet en $+\infty$ **une branche parabolique de direction celle de (OJ)** lorsque $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{f}(x) = +\infty$(ou $-\infty$) et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{f}(x)}{x} = +\infty$(ou $-\infty$),

Remarque : On définit de manière analogue les branches paraboliques en $-\infty$.

Exercice de fixation
Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{2}{x-1} - \sqrt{x+1}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J).
Démontre que (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OI).

Solution

f est définie sur $[-1;1[\cup]1;+\infty[$. On a: $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{x}\right) = 0$;
$\lim_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$.
D'où: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

$\forall x \in]1;+\infty[$, $\frac{f(x)}{x} = \frac{2}{x^2-x} - \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \frac{2}{x^2-x} - \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{x+1}}$. On a: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x^2-x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x^2}\right) = 0.$

On a: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$ car $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, de plus $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1} = +\infty$

donc : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{x+1}} = 0$.On conclut que : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$.

On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$, donc (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OI).

4. Continuité sur un intervalle

4.1-Définition

On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout élément de I.

Exemple

Les fonctions polynôme, rationnelle, sinus, cosinus, racine carrée, puissance, valeur absolue et tangente sont continues sur tout intervalle inclus dans leurs ensembles de définition respectifs.

4.2-Prolongement par continuité

Propriété et définition

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et a un nombre réel n'appartenant pas à D_f.
Si f admet une limite finie ℓ en a , alors on dit que f est prolongeable par continuité en a et la fonction g définie sur $D_f \cup \{a\}$ par : $\begin{cases} \forall x \in \mathrm{Df}, g(x) = f(x) \\ g(a) = \ell \end{cases}$

est continue en a et est appelée **le prolongement par continuité de f en a**.

Exemple

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

On a : $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ et $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

La fonction g définie sur IR par : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}-\{0\}, g(x) = f(x) \\ g(0) = 1 \end{cases}$

est le prolongement par continuité de f en 0.

Exercice de fixation

1. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x-9}{\sqrt{x-5}-2}$.

Démontre que f admet en 9 un prolongement par continuité φ, et définit le.

2. Soit g la fonction définie sur IR \ $\{-1 ; 0 ; 1\}$ par : $g(x) = \frac{x^2+x}{x^2-|x|}$

g est – elle prolongeable par continuité en 0 ? Justifie ta réponse.

Solution

1. $D_f = \{ x \in \mathbb{R} / x-5 \geq 0$ *et* $\sqrt{x-5} - 2 \neq 0 \}$

$x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$

$\sqrt{x-5} - 2 = 0 \Leftrightarrow x-5 = 4 \Leftrightarrow x = 9.$

Donc : $D_f = [5\,;9[\cup]9\,;+\infty[$.

$\forall x \in D_f,\ f(x) = \frac{(x-9)(\sqrt{x-5}+2)}{(\sqrt{x-5}-2)(\sqrt{x-5}+2)} = \frac{(x-9)(\sqrt{x-5}+2)}{x-9} = \sqrt{x-5}+2$

On a : $\lim_{x\to 9} f(x) = \lim_{x\to 9}\left(\sqrt{x-5}+2\right) = 4$

Ainsi, $9 \notin D_f$ *et* f *admet une limite finie en 9. Donc* f *est prolongeable par continuité en 9.*

La fonction φ *est définie sur* $[5\,;+\infty[$ *par :* $\varphi(9) = 4$ *et* $\forall x \in D_f, \varphi(x) = f(x)$ *est le prolongement par continuité de f en 9.*

<u>Remarque</u>: φ *est définie sur* $[5\,;+\infty[$ *par:* $\varphi(x) = \sqrt{x-5}+2$.

2.

$Pour\ tout x \in]-\infty\,;-1[\,\cup\,]-1\,;\,0[\,;\, g(x) = \frac{x^2+x}{x^2+x} = 1$

$On\ a\ donc \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} g(x) = 1$

$Pour\ tout x \in]0\,;1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[\,;\, g(x) = \frac{x^2+x}{x^2-x} = \frac{x+1}{x-1}$

$On\ a\ donc \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x-1} = -1$

$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} g(x) \neq \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)$, *ainsi g n'admet pas de limite en* 0, *donc g n'est pas prolongeable par continuité en* 0.

4.3- Image d'un intervalle par une fonction continue

Propriété 1

L'image d'un intervalle I par une fonction continue sur I est un intervalle ou un singleton.

Exercice de fixation

Détermine l'image de l'intervalle $]-\pi;\pi]$ par la fonction cosinus.

Solution

La fonction cosinus est continue sur $]-\pi;\pi]$

Or pour tout nombre réel x appartenant à $]-\pi;\pi]$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.

De plus $\cos(\pi) = -1$ et $\cos(0) = 1$.

Donc l'image de l'intervalle $]-\pi;\pi]$ par la fonction cosinus est $[-1;1]$.

Propriété 2

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, a et b deux nombres réels tels
que a $< b$.

Intervalle I	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$[a;b]$	$f([a;b]) = [f(a);f(b)]$	$f([a;b]) = [f(b);f(a)]$
$[a;b[$	$f([a;b[) = [f(a);\lim\limits_{\substack{x\to b \\ <}} f(x)[$	$f([a;b[) =]\lim\limits_{\substack{x\to b \\ <}} f(x);f(a)]$
$]a;b]$	$f(]a;b]) = \left]\lim\limits_{\substack{x\to a \\ >}} f(x);f(b)\right]$	$f(]a;b]) = \left[f(b);\lim\limits_{\substack{x\to a \\ >}} f(x)\right[$
$]a;b[$	$f(]a;b[) =]\lim\limits_{\substack{x\to a \\ >}} f(x);\lim\limits_{\substack{x\to b \\ <}} f(x)[$	$f(]a;b[) =]\lim\limits_{\substack{x\to b \\ <}} f(x);\lim\limits_{\substack{x\to a \\ >}} f(x)[$
$[a;\ +\infty[$	$f([a;+\infty[) = [f(a);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$	$f([a;+\infty[) =]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x);f(a)]$
$]-\infty;+\infty[$	$f(]-\infty;+\infty[) =]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$	$f(]-\infty;+\infty[) =]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x);\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[$

Exercice de fixation

Le tableau de variation ci-dessous est celui d'une fonction f définie et continue sur les intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.

x	$-\infty$	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	

$f(x)$	-2 ↗ 5 ↘ 1		$+\infty$ ↘ 1

Détermine l'image par f de chacun des intervalles suivants : *]-∞ ;-1],]0 ;+∞[et [-1 ;0[.*

Solution

- f est continue et strictement croissante sur]-∞ ;-1] donc :

f(]-∞ ;-1]) = $\left]\lim_{x\to-\infty} f(x); f(-1)\right]$ =]-2 ; 5].

- f est continue et strictement décroissante sur]0 ;+∞[donc :

f(]0 ;+∞[) = $\left]\lim_{x\to+\infty} f(x); \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)\right[$ =]1 ;+∞[.

- f est continue et strictement décroissante sur [-1 ;0[donc :

f([-1 ;0[) = $\left]\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)\,; f(-1)\right]$=]1 ;5].

4.4-Opérations sur les fonctions continues

Propriété 1

Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, alors :

- ✓ les fonctions $f+g$, fg , f^n ($n \in \mathbb{N}$)et | f | sont continues sur I.
- ✓ si g ne s'annule pas sur I alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue sur I.
- ✓ si f est positive sur I alors fonction $\sqrt{f}$ est continue sur I.

Exercice de fixation

Soit g et h deux fonctions définies de ℝ vers ℝ par : $g(x) = x^3 + sinx$ et $h(x) = \sqrt{x^2-1}$

1) Justifie que g est continue sur ℝ.

2) Justifie que h est continue sur $]-\infty; -1]$.

Solution

1) g est la somme des fonctions $x \longmapsto x^3$ et $x \longmapsto sinx$ qui sont continues sur ℝ. Donc g est continue sur ℝ.

2) La fonction $x \longmapsto x^2 - 1$ est continue et positive sur $]-\infty; -1]$.
Donc h est continue sur $]-\infty; -1]$.

Propriété 2

Si f est continue sur un intervalle I et g continue sur l'ensemble f(I), alors gof est continue sur I.

Exercice de fixation

Soit g et f deux fonctions définies de ℝ vers ℝ par : $g(x) = \frac{1+x}{2+x}$ et $f(x) = cosx$

Justifie que gof est continue sur ℝ.

Solution
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R}) = [-1; 1]$.
La fonction g est continue sur $[-1; 1]$
Donc la fonction gof est continue sur $\mathbb{R}$.

5. Fonction continue et strictement monotone sur un intervalle

5.1-Propriétés

Propriété 1
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors :

- f est une bijection de I sur l'intervalle f(I).
- la bijection réciproque f^{-1} de f est continue et strictement monotone sur f(I).
- f^{-1} a le même sens de variation que f.

Remarque : Les courbes représentatives de f *et de* f^{-1} dans le plan muni d'un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exercices de fixation

Exercice 1

Soit f: $[0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{x^2}{1+x^2}$$

1. Démontre que f est une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.

2. Déduis en le sens de variation de la bijection réciproque f^{-1}.

Solution

1.D_f = $[0 ; +\infty[$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1.$

f *est dérivable sur* $[0; +\infty[$ *et pour tout* $x \in [0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2x(1+x^2)-2x(x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) > 0$ *car* $\forall x \in]0; +\infty[$,$2x > 0$ *et* $(1+x^2)^2 > 0$.

f *est donc continue et strictement croissante sur [0 ;+∞[; par suite f est une bijection de* $[0; +\infty[$ *sur f(*$[0; +\infty[$ *) = [0;1[.*

2. f^{-1} *est donc définie sur [0 ;1[.* f^{-1} *a le même sens de variation que f, donc* f^{-1} *est strictement croissante sur [0;1[.*

Exercice 2
Soit la fonction g : [1;3] → [0;4]

$$x \longmapsto -x^2 + 2x + 3$$

1. Démontre que g est une bijection.
2. Détermine l'expression explicite de la bijection réciproque g^{-1} de g.

Solution

1. *g est dérivable sur [1;3].* $\forall\, x \in [1\,;3], g'(x) = -\, 2x + 2.$

x	1 3
$-2x+2$	0 -

$\forall\, x \in]1;3], g'(x) < 0$

La fonction g est continue et strictement décroissante sur [1;3] et g([1;3]) = [g(3);g(1)] = [0;4]

donc g est une bijection.

2. Soit y ∈ [0 ;4]. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\,;3]$, *on a les équivalences suivantes :*

$g(x) = y \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 + y = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{4-y}$, *car pour* $y \in [0\,;4]$, $1 + \sqrt{4-y} \in [1\,;3]$

D'où la bijection réciproque g^{-1} *est définie de* $[0\,;4\,]$ *sur* $[1\,;3]$ *par :* $g^{-1}(x) = 1 + \sqrt{4-x}$.

Propriété 2 : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.
Pour tout m compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation : $\boldsymbol{f(x) = m}$
admet au moins une solution comprise entre a et b.

Corollaire 1

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.
Pour tout m compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation : $\boldsymbol{f(x) = m}$
admet une unique solution comprise entre a et b.

Exercice de fixation

On donne ci-contre le tableau de variation d'une fonction f définie et continue sur [-1;+∞[

x	-1 +∞
$f'(x)$	-
$f(x)$	5 ↘ -∞

1. Justifie que l'équation : $f(x) = -10$ admet une unique solution dans [-1;+∞[.

2. L'équation : $f(x) = 13$ admet-elle une solution dans [-1;+∞[? Justifie ta réponse.

Solution

1.f est continue et strictement décroissante sur [-1;+∞[, $f([-1;+\infty[) =]-\infty;5]$ et -10 ∈]-∞ ;5] donc l'équation : $f(x) = -10$ admet une solution unique dans [-1 ;+∞[.
2. 13 ∉]-∞ ;5] donc l'équation : $f(x) = 13$ n'admet pas de solution dans [-1 ;+∞[.

Corollaire 2

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\,;b]$ et si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation : $\boldsymbol{f(x) = 0}$ admet une solution unique dans $]a\,;b[$.

Exercice de fixation

Démontre que l'équation : $x \in]0\,;1[, 2x^3 + 3x - 1 = 0$ admet une unique solution α.

Solution

Soit f la fonction définie sur [0;1] par: $f(x) = 2x^3 + 3x - 1$. f est dérivable sur [0;1].
Pour tout $x \in [0;1]$, $f'(x) = 6x^2 + 3$. Par suite, pour tout x ∈ [0;1], $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur [0;1].
$f(0) = -1$ et $f(1) = 4$.
f est continue et strictement croissante sur [0;1] et $f(0) \times f(1) < 0$,

donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans]0 ;1[.

5.2. Valeur approchée de la solution α d'une équation

Méthodes pratiques de détermination d'une valeur approchée de la solution α d'une équation

L'équation : $x \in]0\,;1[\,, 2x^3 + 3x - 1 = \mathbf{0}$ admet une unique solution α.

Donne une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

Solution

Posons $f(x) = 2x^3 + 3x - 1$

- **Méthode 1** : Méthode de balayage

Pour obtenir une valeur approchée de α à 10^{-1} près, on effectue un balayage de [0;1] avec un pas égal à 0,1 jusqu'à trouver les deux premiers nombres dont les images sont de signes contraires.

x	*0*	*0,1*	*0,2*	*0,3*	*0,4*
$f(x)$	*-1*	*-0,7*	*-0,38*	*-0,05*	*0,3*

On a : $f(0{,}3) \times f(0{,}4) < 0$ *donc 0,3 < α < 0,4.*

Une valeur approchée de α à 10^{-1} *près est 0,3.*

- **Méthode 2** : Méthode de dichotomie

f est une fonction dérivable et monotone sur l'intervalle $[a; b]$ tel que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires. Il existe α élément de $[a; b]$ tel que $f(\alpha) = 0$. Il s'agit de trouver un encadrement de α d'amplitude réduite . On procède comme suit :

- ✓ On calcule : $f(a)$ et $f(\frac{a+b}{2})$
- ✓ Si $f(a)$ et $f(\frac{a+b}{2})$ sont de signes contraires alors $\alpha \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$
  Si $f(a)$ et $f(\frac{a+b}{2})$ sont de même signe alors $\alpha \in \left[\frac{a+b}{2}; b\right]$
- ✓ On répète le même processus dans le nouvel intervalle trouvé auquel appartient α jusqu'à trouver un intervalle d'amplitude demandé.
- ✓

Appliquée à notre exercice, cette méthode donne ce qui suit :

- ✓ $f(0) = -1$ et $f(0{,}5) = 0{,}75$, donc $f(0)$ et $f(0{,}5)$ sont de signe contraires, par conséquent $\alpha \in [\,0; 0{,}5]$
- ✓ $f(0) = -1$ et $f(0{,}25) = -0.22$, donc $f(0)$ et $f(0{,}25)$ sont de même signe, par conséquent $\alpha \in [\,0{,}25\,;0{,}5]$
- ✓ $f(0{,}25) = -0.22$ et $f(0{,}375) = 0{,}23$ donc $f(0{,}25)$ et $f(0{,}375)$ sont de signes contraires par conséquent $\alpha \in [\,0{,}25\,;0{,}375]$
- ✓ $f(0{,}25) = -0.22$ et $f(0{,}3125) = -0.0014$ donc $f(0{,}25)$ et $f(0{,}3125)$ sont de même signe, par conséquent $\alpha \in [\,0{,}3125\,;0{,}375]$
  En finalement à l'ordre 1 on conclue que $\alpha \in [\,0{,}3\,;0{,}4]$ d'où une valeur approchée de α à 10^{-1} près est 0,3.

6. Fonction racine nième, fonction puissance d'exposant rationnel

6.1-Fonction racine nième

Définition

Soit n un nombre entier naturel tel que $n \geq 2$.
La fonction racine nième est la bijection réciproque de la fonction

$$f: [0; +\infty[\longrightarrow [0; +\infty[\quad .$$
$$x \longmapsto x^n$$

La racine n^ième^ d'un nombre réel positif ou nul x est notée $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{\frac{1}{n}}$.

Conséquences :

$$\begin{cases} x \in \mathrm{IR}^+ \\ y = \sqrt[n]{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathrm{IR}^+ \\ x = y^n \end{cases}$$

$\forall x \in \mathrm{IR}^+, \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$ ou $(x^{\frac{1}{n}})^n = x$ et $\sqrt[n]{x^n} = x$.

Exemples

$x \in IR^+, x^3 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5}$; $x \in IR^+, x^2 = 7 \Leftrightarrow x = \sqrt[2]{7} = \sqrt{7}$.

$\sqrt[4]{16} = 2$; $\sqrt[5]{120^5} = 120$.

6.2-Puissance d'exposant rationnel d'un nombre réel strictement positif

Définition

Soit p un nombre entier relatif non nul et q un nombre entier naturel tel que $q \geq 2$.

Pour tout nombre réel a strictement positif, on pose : $a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p = (\sqrt[q]{a})^p = \sqrt[q]{a^p}$.

Exemple

Propriétés

Pour tous nombres rationnels r et r' non nuls et pour tous nombres réels strictement positifs a et b on a :

■ $a^r \times a^{r'} = a^{r+r'}$ ■ $\dfrac{1}{a^r} = a^{-r}$ ■ $\dfrac{a^{r'}}{a^r} = a^{r'-r} = \dfrac{1}{a^{r-r'}}$

■ $(a^r)^{r'} = a^{rr'}$ ■ $a^r \times b^r = (ab)^r$ ■ $\dfrac{a^r}{b^r} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^r$

Exercice de fixation

1. Soit a un nombre réel strictement positif. Mettre sous la forme a^{α} où α est un nombre rationnel, les nombres réels suivants : $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}$; $\dfrac{a^3}{\sqrt{a^{0,4}}}$; $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[4]{a}$.

2. Justifie que : $\dfrac{4 \times \sqrt[10]{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{256}}} = 2\sqrt{2}$.

3. Justifie que pour tous nombres réels a et b strictement positifs : $\sqrt[3]{\sqrt{a^5 b}} \times \sqrt{\sqrt[3]{ab^5}} = ab$.

Solution

1. On a : $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}} = \left(\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{8}}$; $\dfrac{a^3}{\sqrt{a^{0,4}}} = \dfrac{a^3}{a^{\frac{2}{5} \times \frac{1}{2}}} = \dfrac{a^3}{a^{\frac{1}{5}}} = a^{3 - \frac{1}{5}} = a^{\frac{14}{5}}$;

$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[4]{a} = (a)^{\frac{1}{3}} \times (a)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = a^{\frac{7}{12}}$.

2. On a : $\frac{4\times\sqrt[10]{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{256}}} = \frac{2^2\times 2^{\frac{3}{10}}}{\left(2^{\frac{8}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{2+\frac{3}{10}}}{2^{\frac{8}{5}\times\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{23}{10}}}{2^{\frac{4}{5}}} = 2^{\frac{23}{10}-\frac{4}{5}} = 2^{\frac{15}{10}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$.

3. $$\sqrt[3]{\sqrt{a^5b}}\times\sqrt{\sqrt[3]{ab^5}} = \left(\left(a^5b\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\times\left(\left(ab^5\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{5\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}b^{5\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}.$$
$$= a^{5\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+5\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}} = a^{\frac{6}{6}}b^{\frac{6}{6}} = ab$$

C . SITUATIONS COMPLEXES

Situation 1

Des élèves de terminale étudient le refroidissement d'un objet porté à 210°C. L'étude du phénomène thermique conduit à $f(t) = \frac{200}{t} + 10$ où $f(t)$ désigne la température de l'objet en degrés Celsius (°C) à l'instant *t* (*t* est exprimé en minutes).

Les élèves effectuent un contrôle de la température de l'objet après chaque minute (le premier contrôle ayant lieu à l'instant $t = 1$). Ils n'arrivent pas à déterminer la température de l'objet après une très longue période de refroidissement.

En utilisant tes connaissances, détermine cette température.

Solution

Dans cet exercice, les élèves cherchent à déterminer la température après une longue période de refroidissement.

Pour déterminer la température de ce corps après une longue période de refroidissement

- J'utilise les limites de fonction.
- Je calcule la limite de la fonction donnée en $+\infty$
- J'interprète le résultat trouvé.

La température de l'objet en degrés Celsius (°C) à l'instant *t* est $f(t) = \frac{200}{t} + 10$

$$\lim_{t\to+\infty}\left(f(t)\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{200}{t} + 10\right) = 10 .$$

La température de ce corps après une longue période de refroidissement est de 10°C.

Situation 2

Les élèves du club photo de ton établissement s'exercent à la photographie. Ils savent qu'en photographie, la profondeur de champ correspond à la zone de l'espace dans laquelle doit se trouver le sujet à photographier pour en obtenir une image que l'œil considérera nette.

Ils savent également qu'en optique, pour que la netteté s'étende d'une distance a à une distance r, la mise au point doit être faite à la distance P moyenne harmonique des distances a et r

(les distances sont exprimées en mètres)

Les élèves souhaitent que la netteté s'étende de «5m à l'infini ». Ils te sollicitent à cet effet.

En t'appuyant sur tes connaissances, détermine la distance de mise au point à choisir.

Solution
Dans cet exercice, les élèves souhaitent que la netteté s'étende de «5m à l'infini ».
Pour déterminer la distance de mise au point à choisir

- J'exprime P en fonction de a et r .
- J'utilise les limites de fonction.
- Je calcule la limite de la fonction correspondante en $+\infty$
- J'interprète le résultat trouvé.

P est la moyenne harmonique des distances a et r donc $\frac{2}{P} = \frac{1}{a} + \frac{1}{r}$ c'est-à-dire $P = \frac{2ar}{a+r}$.

Pour que la netteté s'étende de «5m à l'infini », la mise au point doit être faite à la distance : $P = \frac{10\,x}{5+x}$ pour x tendant vers $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} P = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{10\,x}{5+x}\right) = 10 .$$

La distance de mise au point à choisir pour que la netteté s'étende de «5m à l'infini » est de 10 mètres.

D. EXERCICES RÉSOLUS

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O,I,J).

Exercice 1
La fonction f est continue sur]-∞;0[et sur]0; +∞[et a pour tableau de variation le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	
$f(x)$	-2	↗	5	↘ 1	‖	$+\infty$ ↘	1

En utilisant ce tableau, donner les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} f\left(-2+\frac{1}{x}\right) \;;\; \lim_{x\to-\infty} f(x^2)\;;\; \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f\left(\frac{-1}{x}\right) \;;\; \lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{2x-1}{x^2+x}\right).$$

SOLUTION

On a :

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2+\frac{1}{x}\right)=-2$ et $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=-5$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(-2+\frac{1}{x}\right)=5.$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x^2)=1.$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\left(\frac{-1}{x}\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-2$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}f\left(\frac{-1}{x}\right)=-2$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{x^2+x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}\right)=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}f(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(\frac{2x-1}{x^2+x}\right)=$ $+\infty.$

<u>Exercice</u> **2**

Calcule les limites suivantes $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin(x^5)}{x}\right)$.

SOLUTION

Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$=-1.$$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin(x^5)}{x}\right)$

On rappelle que $\forall\, T\in\mathbb{R},-1\le\sin(T)\le1$. En particulier $\forall\, x\in\mathbb{R},-1\le\sin(x^5)\le 1$.

Pour $x>0$, $\frac{-1}{x}\le\frac{\sin(x^5)}{x}\le\frac{1}{x}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{x}\right)=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin(x^5)}{x}\right)=0.$

<u>Exercice 3</u>

Soit la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x)=E(x)+(x-E(x))^2$ où $E(x)$ désigne la partie entière du nombre réel x .

1. Soit n un entier relatif.
   Justifie que la fonction k est continue en n.
2. Justifie que la fonction k est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution

La fonction k est définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x)=E(x)+(x-E(x))^2$ où $E(x)$ désigne la partie entière du nombre réel x .

1. n étant un entier relatif, $k(n)=E(n)+(n-E(n))^2=n-0=n.$

Calculons la limite de k à gauche en n.

Pour $n-1\le x<n$, $E(x)=n-1$ donc $k(x)=n-1+(x-n+1)^2.$

$\lim\limits_{\substack{x \to n \\ <}} k(x) = n - 1 + (n - n + 1)^2 = n$

Calculons la limite de k à droite en n.

Pour $n \leq x < n + 1$, $E(x) = n$ donc $k(x) = n + (x - n)^2$.

$\lim\limits_{\substack{x \to n \\ >}} k(x) = n + (n - n)^2 = n.$

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to n \\ <}} k(x) = \lim\limits_{\substack{x \to n \\ >}} k(x) = k(n)$, donc la fonction k est continue en n.

Exercice 4

On considère la fonction f de IR vers IR définie par :$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$.

1. Calcule la limite de f en + ∞ puis interprète graphiquement le résultat.

2. Démontre que la droite (D) d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe représentative (C_f) de f en - ∞.

3. Etudie la position de (C_f) par rapport à (D).

Solution

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x+1} - x)(\sqrt{x^2+x+1}+x)}{\sqrt{x^2+x+1}+x} =$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+x+1 - x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Interprétation graphique : la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote horizontale à la représentation graphique (C_f) de f en + ∞.

2. Démontrons que la droite (D) d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe représentative (C_f) de f en - ∞.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) + 2x + \frac{1}{2}) = \lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}) =$
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x+1} - x)(\sqrt{x^2+x+1}+x)}{\sqrt{x^2+x+1} - x} + \frac{1}{2}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+x+1 - x^2}{\sqrt{x^2+x+1} - x} + \frac{1}{2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - 1\right)} + \frac{1}{2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - 1} + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

Donc la droite (D) d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe représentative (C_f) de f en - ∞.

3. Etudions la position de (C_f) par rapport à (D).

$f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$ et une équation de (D) est $y = -2x - \frac{1}{2}$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > (x+\frac{1}{2})^2$ donc $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+x+1} > \left|x+\frac{1}{2}\right|$ c'est-à-dire :

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+x+1} > x+\frac{1}{2}$ et $\sqrt{x^2+x+1} > -2x - \frac{1}{2}$.

Par suite $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) > -2x - \frac{1}{2}$ donc (C_f) est au-dessus de la droite (D).

Exercice 5

Partie A . g est la fonction définie sur IR par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1. Calcule les limites de g en -∞ et en +∞.
2. Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
3. Démontre que l'équation $x \in$ IR, $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que 1,6 < α < 1,7. 4. Démontre que : $\forall x \in]-\infty;\alpha[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha;+\infty[, g(x) > 0$

Partie B. f est la fonction définie sur $]-1$;+∞ [par : $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ;I ;J). L'unité graphique est 2 cm.

1. Calcule les limites de f en -1 et en +∞ puis interpréter graphiquement les résultats.

2.a) Démontre que : $\forall\, x \in]-1; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$.

b) Etudie les variations de f et dresser son tableau de variation.

c) Donne une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

d) Etudie la position de (C) par rapport à (T).

3. Trace (T) et (C).

Solution

Partie A *Soit g la fonction définie sur IR par* $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3-3x^2-1) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2x^3-3x^2-1) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$.

2. *g est dérivable sur IR.* $\forall x \in IR, g'(x) = 6x^2 - 6x$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *ou* $x = 1$.

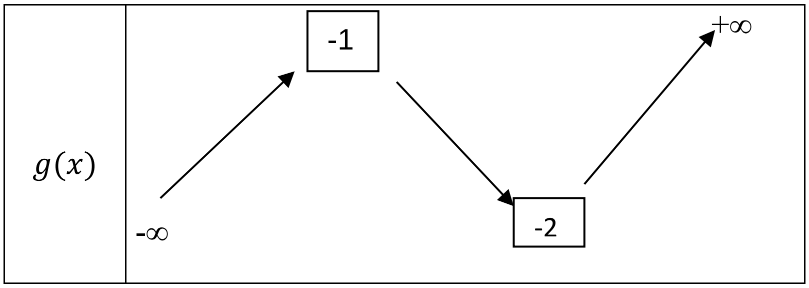
$\forall\, x \in]-\infty; 0[\cup]1;+\infty[, g'(x) > 0$

$\forall\, x \in]0;1[, g'(x) < 0$

On en déduit que : g est strictement croissante sur] -∞ ; 0] et sur [1;+∞ [, g est strictement décroissante sur [0;1]

Tableau de variation de g.

x	-∞		0		1		+∞
$g'(x)$		+	0	-	0	+	



4. *- La fonction g est dérivable sur] -∞ ; 1] , et g' s'annule en 0.*
Par ailleurs, pour tout $x \in]-\infty; 0[$, $g'(x) > 0$ et pour tout $x \in]0; 1[$, $g'(x) < 0$
Par suite $g(0)$ est le maximum de g sur] -∞ ; 1].
D'où : $\forall x \in$] -∞ ;1], $g(x) \leq g(0)$ et comme $g(0) < 0$, finalement,$\forall x \in$] -∞ ;1],
$g(x) < 0$. *- La fonction*
g est continue et strictement croissante sur [1 ;+∞[; g([1;+∞[) = [-2;+∞[,
Or 0 ∈ [-2;+∞[, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans [1;+∞[.
On conclut : l'équation $x \in IR, g(x) = 0$ admet une solution unique α.
1,6 et 1,7 appartiennent à [1;+∞[; $g(1,6) \approx -0,49$ et $g(1,7) \approx 0,16$;
$g(1,6) \times g(1,7) < 0$ donc $1,6 < \alpha < 1,7$.

***4.** –Il a été démontré à la question 3) que $\forall x \in$] -∞ ;1], $g(x) < 0$.*
- La fonction g est continue et strictement croissante sur [1; α [et sur] α ;+∞[, d'où :
$g([1;\ \alpha\,[\,) = [-2; 0[$ et $g(]\,\alpha\,; +\infty[) =]0\,; +\infty[$ donc :
$\forall x \in [1;\ \alpha\,[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\,\alpha\,;+\infty[$, $g(x) > 0$.
On conclut :
$\forall x \in$] -∞;α[, $(x) < 0$ $\forall x \in$] α ;+∞[, $g(x) > 0$

Partie B

1. ***Limite en -1** :*

Pour tout $x > -1$, $\quad f(x) = \dfrac{1-x}{1+\ x^3} = \dfrac{1}{1+\ x^3}(1-x)$

pour $x > -1$, on a $x^3 > -1$, soit $x^3 + 1 > 0$, par suite $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{1}{1+x^3} = +\infty$

et comme $\lim\limits_{x \to -1}(1-x) = 2$ *alors* $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = +\infty$

Donc la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à (C).

$*$ ***Limite en $+\infty$***

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-x}{1+x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x}{x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-1}{x^2} = 0$

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à (Cf) en $+\infty$.

2. a) f est dérivable sur] -1; +∞ [,

$\forall x \in$] -1; +∞ [, $f'(x) = \frac{-(1+x^3)-3x^2(1-x)}{(1+x^3)^2} = \frac{-1-x^3-3x^2+3x^3}{(1+x^3)^2} = \frac{2x^3-3x^2-1}{(1+x^3)^2} = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$

b) $\forall x \in$] -1; +∞ [,$(1+x^3)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ déterminé à la fin de *la partie A , par suite :*

$\forall x \in]-1\,;\,\alpha[\,, f'(x) < 0 \;\; ; \;\; \forall x \in]\alpha\,;\,+\infty[\,, f'(x) > 0 \;\; et \; f'(\alpha) = 0.$

On en déduit que f est strictement décroissante sur] -1;α] et strictement croissante sur [α ;+∞[.

Tableau de variation de f,

X	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗	0

c) Une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est :

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$f'(0) = -1\,;\; f(0) = 1.$

Ainsi une équation de la tangente (T) est : $y = -x + 1.$

d) Pour tout $x > -1$, $f(x) - (-x+1) = \frac{x^2-x}{1+x^3} = \frac{x(x-1)}{1+x^3}$

$\forall x \in]-1; +\infty[$, $1 + x^3 > 0$ *donc le signe de* $f(x) - (-x+1)$ *est celui de* $x(x-1)$.

$f(x) - (-x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *ou* $x = 1$.

$\forall\, x \in]-1\,;\,0[\cup]1;+\infty[,\, f(x) - (-x+1) > 0$ *et* $\forall\, x \in]0;1[,\; f(x) - (-x+1) < 0$

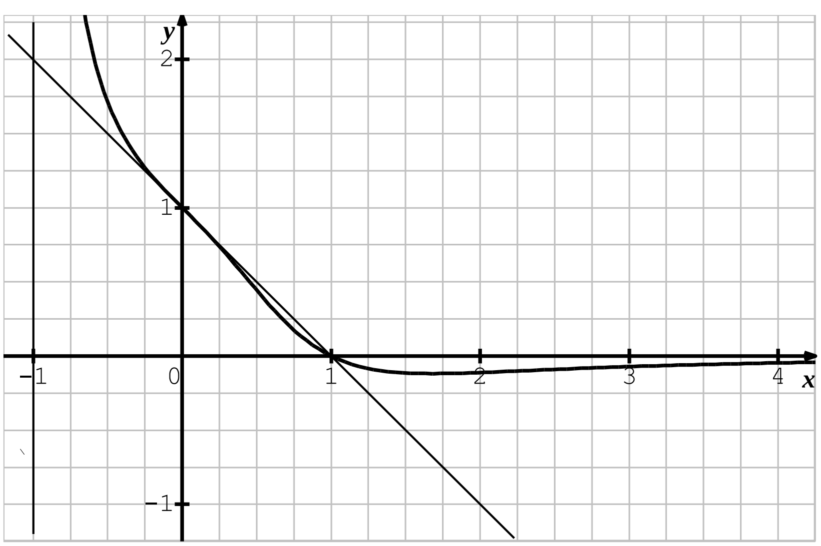
<u>On en déduit que</u> :

(C) est au-dessus de (T) sur] -1 ; 0[U]1;+∞ [,

(C) est au-dessous de (T) sur]0 ;1[

(C) et (T) se coupent aux points d'abscisses 0 et 1.

3. Représentation graphique de (T) et (C).



E. EXERCICES

I – EXERCICES DE FIXATION

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O,I,J).

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, f est une fonction de IR vers IR. Détermine les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

a) $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x}$;

b) $f(x) = \sqrt{x^2+x-2}+x-1$;

c) $f(x) = \sqrt{2x^2+1}-x+3$;

d) $f(x) = \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+2}$;

e) $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$;

f) $f(x) = x\cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$;

g) $f(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2+\sqrt{x^2+1}}$;

h) $f(x) = \sqrt{2x^2+1}-x+3$.

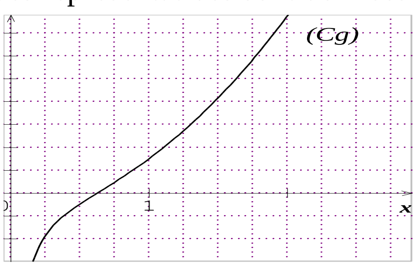
Exercice 2

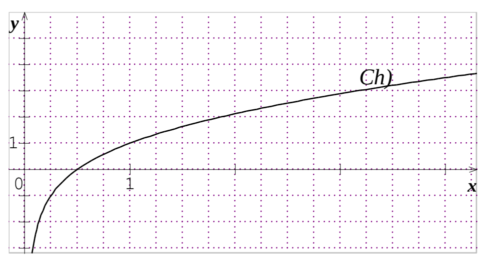
Soit f la fonction définie sur [0 ;+∞[par : $f(x) = \sqrt{4x^2+x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le repère (O,I,J).

Démontre que la droite d'equation $y = 2x-\frac{1}{4}$ est une asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$

Exercice 3

Soit g et h les fonctions définies sur]0 ;+∞[par : $g(x) = 2x^2-\frac{1}{2x}$ et $h(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x}}$, dont les courbes représentatives sont données ci - dessous :





Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x}$.

Interprète graphiquement les résultats

Exercice 4

On considère les fonctions f et g de IR vers IR définies par :

$f(x) = \frac{x-1}{2+\sqrt{x}}$ et $g(x) = \sqrt{x^2+1}$ -3x^2 .

On note (C_f) et (C_g) les courbes représentatives de f et g.

1. Démontre que (C_f) admet en + ∞ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

2. Calcule les limites de $g(x)$ et de $\frac{g(x)}{x}$ lorsque x tend vers $-\infty$ et interpréte graphiquement les résultats.

Exercice 5

Etudie la nature de la branche parabolique à la courbe représentative (C_f) de f en$+\infty$ dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \frac{x^3}{x+2}$; b) $f(x) = \frac{2}{x+1} - \sqrt{x+1}$

c) $f(x) = 2x^2 - 3\sqrt{x}$; d) $f(x) = \sqrt{x^3+8}$.

Exercice 6

Etudie la limite de f en a dans chacun des cas suivants

a) $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$; $a = 0$; b)$f(x) = \frac{\tan x}{x}$; $a = 0$;

c) $f(x) = \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$; $a = \frac{\pi}{2}$; d) $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$, $a = 0$;

e) $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$, $a = 0$.

Exercice 7

f est une fonction de IR vers IR. Dans chacun des cas suivants, démontre que f admet en a un prolongement par continuité et définis ce prolongement.

a)$f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x-5}-2}$, $a = 9$; b)$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $a = 0$; c)$f(x) = \frac{x^2-4}{|x+1|-1}$, a= -2

II – EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 8

Soit P la fonction définie et dérivable sur IR dont le tableau de variation est le suivant :

x	-∞		-2		2		+∞
$P'(x)$		-	0	+	0	-	
$P(x)$	-5	↘	-8	↗	3	↘	-4

1. Détermine le nombre de solutions de l'équation : $x \in$ IR, $P(x) = 0$. Justifie.
2. La courbe représentative (C) de P présente-t-elle des asymptotes horizontales ou verticales ?

Exercice 9

1. Démontre que l'équation : $x \in$ IR, $x^4 - x^2 + 1 = 3$ admet une solution unique α dans]1;2[.
   Donne une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
2. Démontre que l'équation $\cos x = x$ admet une unique solution α dans]0;1[.
   Donne une valeur approchée de α à 10^{-1}près.

III – EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3$ et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

b) Etudie les variations de f et dresser son tableau de variation.
2. a) Démontre que l'équation : $x \in$ IR, $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que $3 < \alpha <$ 4. b) Donne une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
3. Trace (C_f).

Exercice 11

Soit f :] $-\infty$;$-\frac{1}{2}$ [$\rightarrow$] $\frac{1}{2}$;$+\infty$ [

$x \longmapsto \frac{x-3}{2x+1}$

(C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé.
1. Démontre que f est une bijection et détermine sa bijection réciproque f^{-1}.
2. Trace la représentation graphique de f, puis déduis en celle de f^{-1}.

Exercice 12

Partie A

Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = x^3 + 2x - 2$.
1. a) Démontre que l'équation : $x \in$ IR, $g(x) = 0$ admet une solution unique α.
 b) démontre : $0,77 < \alpha < 0,78$.

2. Démontre que :
$\forall x \in$] $-\infty$; α [, $g(x) < 0$,
$\forall x \in$] α; $+\infty$ [$g(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur] $-\infty$; 0 [∪] 0;$+\infty$ [par :$f(x) = x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$.
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J). Unité : 2 cm.
1. Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2.a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C).
b) Etudie la position de (C) par rapport à(D).
3.a) Démontre que :
$\forall x \in$IR*, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$
b) Dresse son tableau de variation.
c) Donne une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
4. Trace (T), (D) et (C).

Exercice 13

On considère la fonction f définie sur ℝ\{-1 ;1} par $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$, de courbe représentative (C_f).
1. Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$.
a)Etudie le sens de variation de g et
et calcule ses limites en + ∞ et en - ∞.
b) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet sur ℝ

une unique solution notée α.

c) Donne un encadrement de α d'amplitude 0,1.

d) Déduis en le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

2. a)Détermine les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Détermine les limites de f à gauche et à droite en -1 et en 1.

Interprète graphiquement les résultats obtenus

c)Montre que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$,

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$$

d) Déduis en les variations de f et dresser son tableau de variation.

3.a)Détermine les nombres réels a, b , c et d tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\ ;1\}$,

$f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2-1}$.

b) Déduis en que (C_f) admet une asymptote oblique (D) d'équation $y = x + 2$.

c) Etudie la position relative de (C_f) et (D).

d) Montre que les abscisses des points B et B' où (C_f) admet une tangente parallèle à (D) sont $-2+\sqrt{3}$ et $-2-\sqrt{3}$

4.Donne une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 2.

5. Détermine les points d'intersection de (C_f) avec la droite (OI).

6. Trace (C_f) et la tangente (T).

THÈME : MODÉLISATION D'UN PHÉNOMÈNE ALÉATOIRE

Durée : 18 heures **Code :**

Léçon 2 : PROBABILITÉ CONDITIONNELLE ET VARIABLE ALÉATOIRE

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pour l'organisation de la kermesse de leur Lycée, les élèves d'une classe de terminale proposent le jeu suivant à un stand :
« Une urne contient trois boules rouges numérotées 100, 200 et 300 et deux boules noires numérotées 2 et 5, toutes indiscernables au toucher ».
Les règles du jeu sont les suivantes :
Le joueur mise x francs CFA et tire successivement avec remise deux boules de l'urne. Si les deux boules tirées sont de même couleur, la partie est perdue et il perd sa mise. Sinon, le joueur remporte le montant en francs CFA égal au produit des numéros apparus sur les boules tirées.
On appelle gain algébrique du joueur la différence entre ce qu'il obtient à l'issue du jeu et sa mise. Le joueur est perdant si son gain algébrique est négatif.
Pour ne pas être perdant, ces élèves souhaitent déterminer la mise minimale du joueur pour que le jeu leur soit avantageux. Ensemble, ils s'organisent pour trouver cette mise.

B.CONTENU DE LA LEÇON

I. Probabilités conditionnelles

1. Définition

Soit B un évènement d'un univers Ω tel que P(B) ≠ 0.
On appelle **probabilité conditionnelle sachant que B est réalisé**, l'application P_B qui à tout évènement A de Ω associe le nombre réel $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.
Le nombre réel $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ est noté $P_B(A)$ ou P (A/B) et se lit probabilité de A sachant que B est réalisé ou simplement probabilité de A sachant B ou encore probabilité de A si B.
Ainsi on a : $P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

<u>Exercice de fixation</u>

E et F sont deux événements tels que : $p(E)=\frac{1}{2}$; $p(F)=\frac{3}{4}$ et $p(E\cap F)=\frac{2}{5}$
Calcule p_E(F) et p_F(E)

<u>Solution</u>

On a :
$P_E(F) = \frac{p(E\cap F)}{p(E)} = \frac{4}{5}$ et $P_F(E) = \frac{p(E\cap F)}{p(F)} = \frac{8}{15}$

2. Conséquence de la définition

Soit A et B deux évènements d'un univers Ω tels que : $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$

$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$

<u>Exercice de fixation</u>

I et F sont deux événements tels que : $p(F) = 0{,}75$ et $p_F(I) = 0{,}45$.

Calcule $p(F \cap I)$.

<u>Solution</u>

On a: $P(F \cap I) = P_F(I) \times p(F)$

$= 0{,}45 \times 0{,}75$

$= 0{,}3375$

3. Évènements indépendants

Dans la suite de la leçon, A et B sont des évènements d'un même univers

a. Définition

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω.

Deux évènements A et B de Ω sont indépendants lorsque : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

b. Conséquence de la définition

Soit A et B deux événements d'un univers Ω tels que A et B soient de probabilités non nulles

A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$ ou $P_A(B) = P(B)$

Interprétation

Les évènements A et B sont indépendants lorsque la réalisation de l'un n'influence pas la réalisation de l'autre.

c. Propriétés

Si A et B sont deux événements indépendants alors :

$\overline{A}$ et B sont indépendants ;

A et $\overline{B}$ sont indépendants ;

$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Remarque :

Ne pas confondre évènements incompatibles et événements indépendants.

Deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne peuvent pas être indépendants.

Exercice de fixation

On lance une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. Soit A l'événement « obtenir Face au premier lancer » et B l'événement « obtenir Face au second lancer ».

Justifie que A et B sont deux évènements indépendants.

<u>SOLUTION</u>

L'univers $\Omega = \{(P, P) ;(P ;F) ;(F ;P) ;(F ;F)\}$.

Card $\Omega = 2^2 = 4$

$A = \{(F; P) ;(F; F)\}$; $B = \{(P; F) ;(F; F)\}$; $A \cap B = \{(F; F)\}$.

$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ et $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, donc A et B sont deux évènements indépendants.

4. Formule des probabilités totales

a) Partition d'un ensemble

Définition

Soit Ω un ensemble non vide et B_1, B_2,…,B_n des parties de Ω tel que n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

B_1, B_2,…,B_n forment une partition de l' ensemble Ω signifie que B_1, B_2,…,B_n sont deux à deux disjoints et $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$

Exercice de fixation

Soit l'ensemble A tel que : A = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8}

Justifie que les ensembles B, C, D et E ci-dessous forment une partition de l'ensemble A.

B = {1; 2} , C = {3; 4; 5}, D = {6; 7} et E = {8}.

Solution

$B \cap C = \emptyset$, $B \cap D = \emptyset$, $B \cap E = \emptyset$, $C \cap D = \emptyset$, $C \cap E = \emptyset$, $D \cap E = \emptyset$ et $B \cup C \cup D \cup E = A$.

Donc B, C, D et E forment une partition de l'ensemble A.

b) Formule des probabilités totales

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

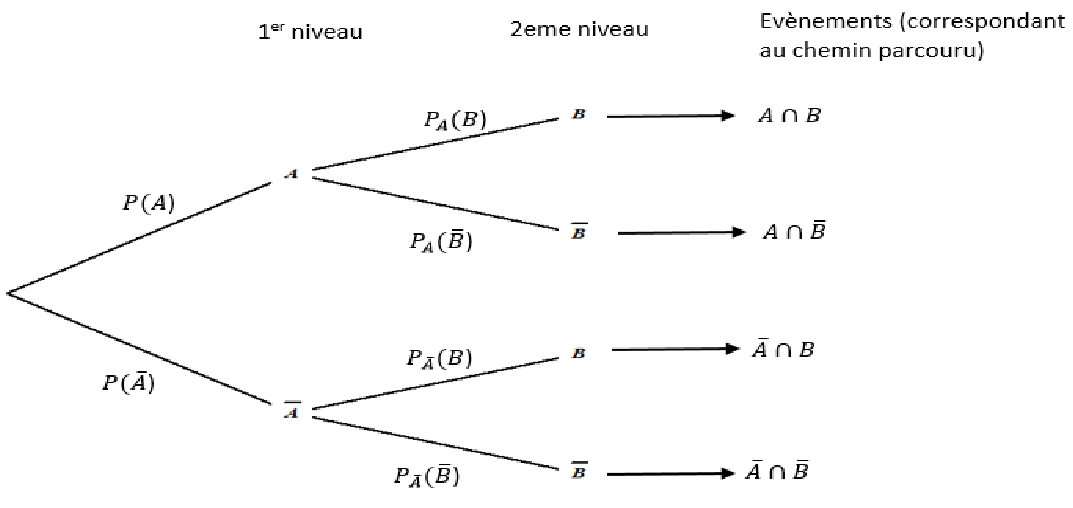
B_1, B_2,…,B_n forment une partition d'un univers Ω telle que la probabilité de chaque événement $B_i (1 \leq i \leq n)$ soit non nulle.

- Pour tout évènement A de Ω, $P(A) = P(A \cap B_1) + \cdots + P(A \cap B_n)$.
- Pour tout i $(1 \leq i \leq n)$, $P(A \cap B_i) = P_{B_i}(A) \times P(B_i)$

c) Arbre de probabilités ou arbre pondéré

Un arbre de probabilités (ou arbre pondéré) est un schéma permettant de résumer une expérience aléatoire connaissant des probabilités conditionnelles.

En voici une présentation :



Exercice de fixation

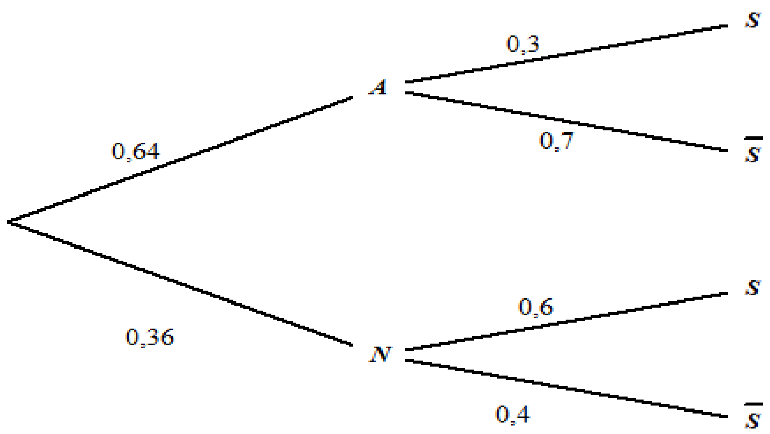
Un magasin propose des réductions sur les deux marques d'ordinateurs qu'il distribue. La marque A représente 64 % des ordinateurs vendus et la marque N, 36 % .

30 % des ordinateurs de la marque A et 60 % de la marque N sont soldés.

On désigne par : A l'évènement « obtenir un ordinateur de marque A », N l'évènement « obtenir un ordinateur de marque N » et S l'évènement « obtenir un ordinateur soldé ».

Construis un arbre pondéré décrivant la situation.

Solution



II-Variable aléatoire

Dans toute la suite, Ω est un univers fini.

1 . Définitions

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω.

■ On appelle variable aléatoire, toute application X de Ω dans IR.

■ Soit X une variable aléatoire qui, à chaque éventualité e_i de Ω, associe un nombre réel x_i .
L'ensemble $\{x_1\ ;\ x_2\ ; \dots ;\ x_n\}$ se note X (Ω) et s'appelle l'ensemble des valeurs prises par X ou l'univers image de Ω par X.

■ Soit P une probabilité sur Ω.
La loi de probabilité de X est l'application qui, à toute valeur x_i, prise par X, associe P$(X = x_i)$ où $(X = x_i)$ est l'ensemble $\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = x_i\}$.

NB : Il est commode de représenter une loi de probabilité par un tableau du type :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Dans ce tableau les éléments x_i sont rangés dans l'ordre croissant.
Remarque : $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

<u>Exercice de fixation</u>

Une urne contient six boules indiscernables au toucher dont deux sont blanches et quatre sont rouges.
On tire simultanément trois boules de l'urne et on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.
1) Détermine les valeurs prises par la variable aléatoire X.
2) Etablis la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Solution

Soit Ω l'univers associé.
1) Dans ce tirage simultané de trois boules nous pouvons avoir soit aucune boule blanche, soit une boule blanche, soit deux boules blanches. Donc les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0;1 ou 2. Ainsi X (Ω) = {0; 1; 2}
2) L'univers Ω est l'ensemble de tous les tirages simultanés de trois boules parmi six ;
donc Card(Ω) = C_6^3= 20.

• (X = 0) correspond au tirage de trois boules rouges donc p(X = 0) $= \frac{C_4^3}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

• (X = 1) correspond au tirage d'une boule blanche et de deux boules rouges donc

P(X = 1) = $\frac{C_2^1 \times C_4^2}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

• (X = 2) correspond au tirage de deux boules blanches et d'une boule rouge donc

P(X = 2) = $\frac{C_2^2 \times C_4^1}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

Nous avons le tableau suivant :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

2. Espérance mathématique, variance et écart type.

Définitions

Soit X une variable aléatoire prenant *n* valeurs x_1 ; x_2 ; … ; x_n avec les probabilités respectives p_1 ; p_2 ; … ; p_n.

■ On appelle espérance mathématique ou moyenne de X le nombre réel noté E(X) tel que :

E(X) $=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$.

■ On appelle variance de X le nombre réel positif noté V(X) tel que :

V(X) $=\sum_{i=1}^{n}(x_i - E(X))^2 p_i = (x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + \cdots + (x_n - E(X))^2 p_n$

■ On appelle écart type de X le nombre réel noté σ(X) tel que : σ(X) = $\sqrt{V(X)}$.

Remarque

La variance d'une variable aléatoire X peut être donnée par :

V(X) = E(X^2) - $[E(X)]^2 = x_1{}^2 p_1 + x_2{}^2 p_2 + \cdots + x_n{}^2 p_n - [E(X)]^2$

Interprétation de l'espérance mathématique en termes de jeu :

Soit E(X) l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X désignant le gain algébrique (différence entre la somme perçue et la mise).

E(X) est le gain moyen d'un joueur.

♦Lorsque $E(X) > 0$, le jeu est **avantageux pour le joueur**.

♦Lorsque $E(X) < 0$, le jeu est **désavantageux pour le joueur**.

♦Lorsque $E(X) = 0$, le jeu est **équitable**.

Exercice de fixation

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	-1000	100	300	600
P(X = x_i)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Calcule l'espérance mathématique et l'écart type de la variable X.

Solution

. E(X) = (-1000)$\left(\frac{1}{8}\right)$ + 100$\left(\frac{3}{8}\right)$+ 300$\left(\frac{3}{8}\right)$+ 600$\left(\frac{1}{8}\right)$= 100

3 . Schéma de Bernoulli

a. Définitions

■Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire ne conduisant qu'à deux éventualités exclusives : l'une est appelée **succès** notée S et l'autre **échec** notée $\overline{S}$.

■Un **schéma de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois de suite ($n \geq 2$) de façons indépendantes une même épreuve de Bernoulli.

La probabilité **p** de succès est appelée **paramètre** de l'épreuve de Bernoulli.

La probabilité **p** de succès et **n** sont appelés **paramètres** du schéma de Bernoulli.

Remarque

Lorsqu'on a une épreuve de Bernoulli, si on note p la probabilité du succès, alors celle de l'échec est 1- **p**.

Exercice de fixation

On lance une fois un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On s'intéresse à l'apparition du chiffre 6 sur la face supérieure.
Justifie qu'on a une épreuve de Bernoulli dont tu préciseras la probabilité de succès.

Solution

Le lancer de ce dé cubique conduit à deux éventualités exclusives : « obtenir 6 » avec une probabilité de $\frac{1}{6}$ et « ne pas obtenir 6 » avec une probabilité de $\frac{5}{6}$.
On a une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès $\frac{1}{6}$.

b. Propriété

Soit un schéma de Bernoulli à n épreuve et p la probabilité du succès (celle de l'échec est 1-p).
La probabilité d'obtenir exactement k succès au cours des n épreuves est :
$\boldsymbol{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$ où $0 \leq k \leq n$.

Exercice de fixation

On lance 5 fois de suite un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de1 à 6 et on note après chaque lancer, le chiffre apparu sur la face supérieure.
Calcule la probabilité d'obtenir exactement 4 fois le chiffre 2.

Solution

Considérons l'épreuve de Bernoulli qui consiste à lancer le dé et à s'intéresser au chiffre 2.
Le succès S « Obtenir 2 » a pour probabilité $P(S) = \frac{1}{6}$.
L'épreuve étant répétée 5 fois de suite et de façon indépendante, on a un schéma de Bernoulli.
L'événement« Obtenir exactement 4 fois le chiffre 2 au cours des 5 lancers » a pour probabilité :$C_5^4 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(1-\frac{1}{6}\right)^1 = \frac{25}{7776}$.

4. Loi binomiale

a. Définition

Soit un schéma de Bernoulli à n épreuves identiques, p la probabilité du succès et X la variable aléatoire désignant le nombre k $(0 \leq k \leq n)$ de succès au cours des n épreuves.
La loi de probabilité de X est définie par : $\boldsymbol{P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$
Cette loi de probabilité est appelée loi binomiale de paramètres $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{p}$.
Elle est notée B(n;p**)**.

b. Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.
L'espérance mathématique E(X) et la variance V(X) de X sont données par les formules :

E(X) = np et V(X) = np(1-p)

<u>Exercice de fixation</u>

Sur une route, un carrefour est muni d'un feu tricolore A. On admet que la probabilité pour que le feu A soit vert est $\frac{3}{4}$.
Un automobiliste passe 5 fois à ce carrefour muni du feu A.
Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de fois où l'automobiliste rencontre le feu vert.
1) Calcule la probabilité pour que l'automobiliste rencontre exactement 3 fois le feu vert.
2.a) Calcule l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X.
b.)Donne l'arrondi d'ordre zéro de l'espérance mathématique de X et interprète ce résultat.

Solution

1) Lorsque l'automobiliste se présente au carrefour A, on s'intéresse à deux résultats : S « il rencontre le feu vert » et $\overline{S}$ « il ne rencontre pas le feu vert ». Cette expérience est une épreuve de Bernoulli. On a $P(S) = \frac{3}{4}$.
L'épreuve étant répétée 5 fois de suite et de façon indépendante, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p tels que : $n = 5$ et $p = \frac{3}{4}$..
La probabilité pour que l'automobiliste rencontre exactement 3 fois le feu vert est :
$P(X = 3) = C_5^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{270}{1024} \approx 0{,}26$.
2.a) Ici, il est préférable d'utiliser les formules $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$ lorsque X suit une loi binomiale de paramètres$n$ et p. Ainsi, $E(X) = 5 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$ et $V(X) = 5 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{15}{16}$
b.)$E(X) \approx 4$. L'automobiliste rencontre en moyenne 4 feux verts en passant 5 fois au carrefour muni du feu A.

2.5 Fonction de répartition

Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω et P une probabilité sur Ω.
La fonction de répartition de X est l'application F de ℝ dans$[0; 1]$ définie par : $F(x) = P(X \leq x)$.

<u>Exercice de fixation</u>

Détermine et représente graphiquement la fonction de répartition F de la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous.

x_i	-1000	100	300	600
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

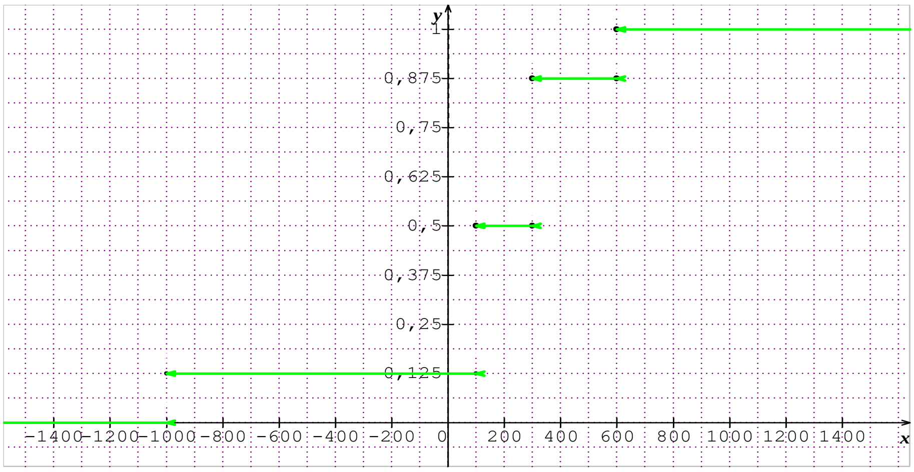
Solution

• Détermination de F.

La fonction de répartition F de X est définie sur ℝ par :
Pour tout $x \in]-\infty; -1000[, F(x) = 0$
Pour tout $x \in [-1000; 100[, F(x) = \frac{1}{8}$
Pour tout $x \in [100; 300[, F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$
Pour tout $x \in [300; 600[, F(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$

Pour tout $x \in [600;\ +\infty[, F(x) = \frac{7}{8} + \frac{1}{8} = 1.$

• **Représentation graphique de F.**



Remarque
La fonction de répartition est une fonction définie par intervalles.
La fonction de répartition est une fonction en escalier, croissante.

C. SITUATION COMPLEXE

Lors de la fête de fin d'année, une enquête faite par le conseil scolaire d'un lycée, auprès d'un échantillon d'élèves de terminales C et D révèle que :

- 25% des élèves aiment jouer au damier sachant qu'ils sont de la terminale C.
- Un tiers des élèves aiment jouer au damier sachant qu'ils sont de la terminale D.
- 3 élèves sur 10 aiment jouer au damier.

Dago, le responsable des jeux et loisirs du conseil scolaire, choisit au hasard un élève de cet échantillon et note :
Cependant, Dago ne se souvient plus de la proportion des élèves de la de terminale D qui doit figurer dans son rapport.
Pour cela, étant élève de la terminale C, il sollicite ton aide.
A l'aide de tes connaissances mathématiques, aide Dago à retrouver la valeur de p(E).

Solution

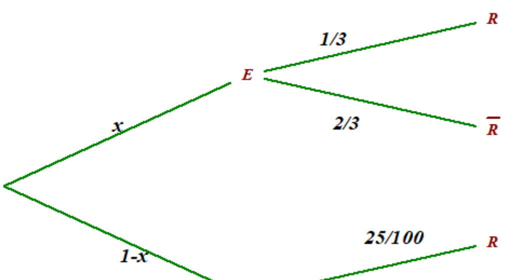
- ✓ Pour répondre à la préoccupation de Dago, je vais utiliser les probabilités.
- ✓ J'utilise les probabilités conditionnelles et la formule des probabilités totales

Modélisation du problème :

- E l'événement « l'élève choisi est en classe de terminale D » ;
- R l'événement « l'élève choisi aime jouer au damier » ;
- P(E) la probabilité de l'événement E.

*Je traduis cette situation par un arbre de probabilités ;
*Je détermine p(E).

Pour ce faire, posons $x = P(E)$



On a les probabilités suivantes :
$P(\bar{E})$=1-x ; P_E(R)= $\frac{1}{3}$; $P_E(\bar{R})$= $\frac{2}{3}$; $P_{\bar{E}}$(R)= $\frac{25}{100}$ et $P_{\bar{E}}(\bar{R})$= $\frac{75}{100}$.
En utilisant la formule des probabilités totales, on a :
$P(R) = P(R \cap E) + P(R \cap \bar{E})$; comme $(R) = \frac{3}{10}$,
alors $\frac{3}{10} = \frac{1}{3}x + \frac{25}{100}$ (1-x) d'où x= $\frac{3}{5}$.
Donc finalement p(E)= $\frac{3}{5}$
Je réponds à la préoccupation de Dago
la proportion des élèves de la de terminale D est 60 %.

D. EXERCICES

Exercices de renforcement

Exercice 1

Un joueur lance successivement trois fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. Il gagne 600 francs s'il obtient 3 fois « FACE ». Il gagne 300 francs s'il obtient exactement 2 fois « FACE » et gagne 100 francs s'il obtient exactement une fois « FACE », mais il perd 1000 francs s'il n'obtient que des « PILE ». On désigne par X la variable aléatoire représentant en francs le gain du joueur (un gain est positif ou négatif).
1) Détermine la loi de probabilité de la variable X.
2) Calcule la probabilité de gagner strictement moins de 300 francs.
3) a. Calcule l'espérance mathématique de la variable X.
   b. Que représente ce résultat pour le joueur ?
   c. Interprète ce résultat pour le joueur.
4) Calcule le montant que le joueur devrait payer lorsqu'il n'obtient que des « PILE » pour que le jeu soit équitable.

Solution

1. Les résultats possibles sont : (F;F;F) ; (F;F;P) ; (F;P;F) ; (P;F;F) ; (P;P;F) ; (P;F;P) ; (F;P;P) ; (P;P;P).
Les différents résultats possibles donnent les gains suivants : -1000 ; 100 ; 300 ; 600.
L'ensemble des valeurs prises par X est :$\{-1000\,;\ 100\,;\ 300\,;\ 600.\}$
P(X= -1000) = P({(P ; P ; P)})= $\frac{1}{8}$; P(X= 100) = P({(P; P; F) ; (P; F; P) ; (F; P; P)}) = $\frac{3}{8}$;
P(X= 300) = P ({(F; F; P) ; (F; P; F) ; (P; F; F) })= $\frac{3}{8}$; P(X= 600) = P({(F ; F ; F)})= $\frac{1}{8}$

x_i	-1000	100	300	600
P(X = x_i)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2. Soit A l'événement « Gagner moins de 300F ».
Donc P(A)= P(X= -1000) + P(X= 100)= $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$.
3. a. E(X) = (-1000)$\left(\frac{1}{8}\right)$ + 100$\left(\frac{3}{8}\right)$+ 300$\left(\frac{3}{8}\right)$+ 600$\left(\frac{1}{8}\right)$= 100.
   b. 100 F représente le gain moyen du joueur.
   c. E(X) > 0 donc le jeu est favorable au joueur.

4. Soit S le montant que le joueur devrait payer s'il n'obtenait que des « PILE » pour que le jeu soit équitable.

$E(X) = (-S)\left(\frac{1}{8}\right) + 100\left(\frac{3}{8}\right) + 300\left(\frac{3}{8}\right) + 600\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1800-S}{8}$.

Le jeu est équitable lorsque E(X) = 0.

$E(X) = 0 \Leftrightarrow \frac{1800-S}{8} = 0 \Leftrightarrow S = 1800$.

Le joueur doit payer 1800F lors

Exercice 2

Une urne contient trois boules blanches et cinq boules noires, indiscernables au toucher.

On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Lorsqu'on tire une boule blanche , on marque un point ; lorsqu'on tire une boule noire, on perd un point. Désignons par X La variable aléatoire égale au nombre de points marqués.

1) Détermine les valeurs prises par X.

2) Etablis la loi de probabilité de X.

Solution

1) Inventaire de toutes les éventualités :

Désignons par B une boule blanche et par N une boule noire.

Les différentes éventualités sont : BBB, BBN, BNN et NNN ; ce qui correspond respectivement aux points marqués : +3, +1,-1 et -3.

L'ensemble des valeurs prises est {3 ; 1 ;-1 ;-3}

2) Loi de probabilité de X.

$P(X=-3)=\frac{C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}$

$P(X= -1)=\frac{C_3^2 \times C_5^1}{C_8^3} = \frac{15}{56}$

$P(X=1)= \frac{C_3^1 \times C_5^2}{C_8^3} = \frac{30}{56}$

$P(X=3)=\frac{C_5^3}{C_8^3} = \frac{10}{56}$

Exercice 3

Sur un disque, on a enregistré dix morceaux différents. Le temps d'écoute de chacun d'eux est donné dans le tableau :

Code du morceau enregistré	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Temps d'écoute en secondes	280	200	240	280	260	240	280	200	240	280

Un appareil de lecture sélectionne au hasard un des dix morceaux et un seul.

Tous les morceaux ont la même probabilité d'être sélectionnés.

1. Calcule la probabilité, pour que chacun des morceaux soit sélectionné à cette lecture.

2.a) Calcule la probabilité de l'événement E_1 :

« Le morceau sélectionné a une durée d'écoute de 240 secondes ».

b) Calcule la probabilité de l'événement E_2 :

« Le morceau sélectionné a une durée d'écoute supérieure à 220 secondes ».

3. On note X la variable aléatoire qui, à tout morceau sélectionné, associe le temps d'écoute de ce morceau.

a) Détermine la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b) Calcule l'espérance mathématique de X.

Solution.
1.
On a:
$P\ (A)\ = P\ (D)\ = P\ (G)\ = P\ (J) = \frac{280}{2500} = \frac{14}{125}$, $P(C)\ = P\ (F)\ = P\ (I)\ = \frac{240}{2500}\ = \frac{12}{125}$,
$P\ (B)\ = P\ (H)\ = \frac{200}{2500}\ = \frac{10}{125}$, $P\ (E)\ = \frac{260}{2500} = \frac{13}{2500}$.
2a) $P\ (E_1)\ =\ P(I) + P(F) + P(C)\ =\ 3 \times \frac{12}{125}\ = \frac{36}{125}$
b) $P\ (E_2) =\ 1 - [\ P(B) + P(H)\ ]\ =\ 1\ - \frac{20}{125} = \frac{105}{125}$
3.a) L'ensemble des valeurs prises par X est : {200 ; 240 ; 260 ; 280}
La loi de probabilité de X :
$P(X = 200) = \frac{20}{125}$; $P(X = 240) = \frac{36}{125}$; $P(X = 260)\ = \frac{13}{125}$; $P(X = 280)\ = \frac{56}{125}$
b) Esperance mathématique de X.
$E(X) =\ 200 \times \frac{20}{125} + 240 \times \frac{36}{125} + 260 \times \frac{13}{125} + 280 \times \frac{56}{125}\ = \frac{31700}{125}\ = \frac{1268}{5}$.

<u>Exercice 4</u>

A la suite d'un sondage effectué à propos de la construction d'un barrage, on estime que : 65% de la population concernée est contre la construction du barrage et parmi ces opposants, 70% sont des écologistes. Parmi les personnes non opposées à la construction, 20% sont des écologistes. On interroge une personne au hasard.
1) Calcule la probabilité que cette personne interrogée soit opposée à la construction du barrage et soit écologiste.
2) Calcule la probabilité qu'elle ne soit pas opposée à la construction du barrage et soit écologiste.
3) Déduis-en la probabilité qu'une personne interrogée soit écologiste.

NB : Pour faciliter les réponses aux différentes questions, on pourra noter les évènements

Solution

Désignons par E l'événement : « la personne interrogée est écologiste « et par C l'événement : « la personne interrogée est contre la construction du barrage « .

1) Il s'agit de calculer $P\ (C \cap E)$
   On a: $P\ (C \cap E)\ =\ P(C) \times P_C(E)\ =\ 0{,}65\ \times 0{,}70\ = 0{,}455$
2) Il s'agit de calculer $P(\bar{C} \cap E)\ \ =\ \ P\ (\bar{C}) \times P_{\bar{C}}(E) =\ 0{,}35\ \times 0{,}20 = 0{,}07$
3) La formule des probabilités totales donne :
   $P(E) =\ P\ (C \cap E)\ +\ P\ (\bar{C} \cap E)\ = 0{,}455\ + 0{,}07\ =\ 0{,}525$.

Exercices d'approfondissement

<u>Exercice</u>

Mariam, une jeune diplômée sans emploi, a reçu un fonds et décide d'ouvrir un restaurant. Après un mois d'activité, elle constate que pour un jour donné :
- La probabilité qu'il y ait une affluence de clients est de 0,6.
- Lorsqu'il y a une affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est de 0,7.
- Lorsqu'il n'y a pas d'affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est de 0,4.

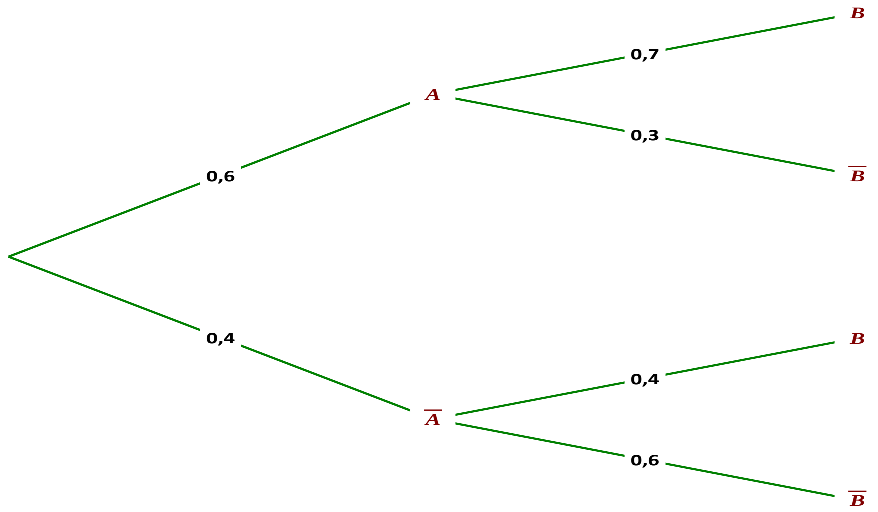
On désigne par A l'évènement « il y a affluence de clients » et par B l'évènement « Mariam réalise un bénéfice ».
1) On choisit un jour au hasard.
a) Calcule la probabilité de l'évènement E « il y a affluence de clients et Mariam réalise un bénéfice »
b) Démontre que la probabilité P(B) de l'évènement B est égale à 0,58.

c) Mariam a réalisé un bénéfice. Calcule la probabilité qu'il y ait eu une affluence de clients ce jour-là. *(On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible)*

2) Mariam veut faire une prévision sur trois jours successifs donnés. On désigne par X le nombre de fois qu'elle réalise un bénéfice sur les trois jours successifs.
a) Détermine les valeurs prises par X.
b) Détermine la loi de probabilité de X. *(On donnera l'arrondi d'ordre 3 des résultats)*
c) Calcule l'espérance mathématique E(X) de X.

3) Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On note P_n la probabilité que Mariam réalise au moins une fois un bénéfice pendant n jours successifs.
a) Justifie que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $Pn = 1- (0,42)^n$
b) Détermine la valeur minimale de n pour qu'on ait $P_n \geq 0,9999$.

Solution
Etablissons un arbre pondéré



1) a. **Calcul de $P\ (E)$**
E « il y a affluence de clients et Mariam réalise un bénéfice »
Ainsi E = A∩B. on a donc P(E) = P(A∩B) = P(A)×P(B/A)
$= 0,6\times0,7$
$= 0,42$

b) Calcul de P(B)
$P(B)= P(A\cap B) + P(\bar{A}\cap B)$
$= P(A)\times P(B/A) + P(\bar{A})\times P(B/\bar{A})$
$= 0,6\times0,7 + 0,4\times0,4$
$= 0,42 + 0,16$
$= 0,58$

c) On sait que Mariam a réalisé un bénéfice. Calculer la probabilité qu'il y ait eu une affluence de clients ce jour-là, revient à calculer la probabilité de l'évènement A sachant B.

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0,42}{0,58} = \frac{42}{58} = \frac{21}{29}$$

2) a. Sur les trois jours Mariam peut ne jamais réaliser un bénéfice donc X prendra la valeur 0.
Sur les trois jours elle ne peut réaliser un bénéfice qu'un seul jour. X prendra la valeur 1,
Sur les trois jours elle peut réaliser un bénéfice sur deux jours, X prendra la valeur 2.
Et enfin sur les trois jours elle peut réaliser un bénéfice tous les jours. X prendra donc la valeur 3.
On a donc $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$.

b). X est une variable qui suit une loi binomiale de paramètres n = 3 et P = 0,58.

$P(X = 0) = C_3^0 \times (0{,}58)^0 \times (1 - 0{,}58)^3 = 0{,}074088 = 0{,}074$
$P(X = 1) = C_3^1 \times (0{,}58)^1 \times (1 - 0{,}58)^2 = 0{,}306936 = 0{,}307$
$P(X = 2) = C_3^2 \times (0{,}58)^2 \times (1 - 0{,}58)^1 = 0{,}423864 = 0{,}424$
$P(X = 3) = C_3^3 \times (0{,}58)^3 \times (1 - 0{,}58)^0 = 0{,}195112 = 0{,}195$

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,074	0,307	0,424	0,195

c). **Calcul de E(X)**
$E(X) = n\times p = 3\times 0{,}58 = 1{,}74$

3) a. **Calcul de P_n**
Soit l'évènement F : « Mariam réalise au moins une fois un bénéfice pendant n jours successifs », l'évènement contraire de F est l'évènement $\bar{F}$ « Mariam ne réalise aucun bénéfice pendant n jours successifs ».

On a $P(\bar{F}) = C_n^0 \times (0{,}58)^0 \times (1 - 0{,}58)^n$
$= (1 - 0{,}58)^n$
$=(0{,}42)^n$

Donc $P_n = p(F)$
$=1- P(\bar{F})$
$=1-(0{,}42)^n$

b) $P_n \geq 0{,}9999 \Leftrightarrow 1-(0{,}42)^n \geq 0{,}9999$
$\Leftrightarrow -(0{,}42)^n \geq 0{,}9999-1$
$\Leftrightarrow -(0{,}42)^n \geq -0{,}0001$
$\Leftrightarrow (0{,}42)^n \leq 0{,}0001$
$\Leftrightarrow n \times \ln(0{,}42) \leq \ln(0{,}0001)$
$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}0001)}{\ln(0{,}42)}$.
On a $\frac{\ln(0{,}0001)}{\ln(0{,}42)} \approx 10{,}61$, d'où $n \geq 10{,}61$.

La valeur minimale de n pour qu'on ait $P_n \geq 0{,}9999$ est donc 11.

SECONDAIRE
Tle D
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

THEME : FONCTIONS NUMERIQUES

Durée : 14 heures **Code :**

Leçon 3: DÉRIVABILITÉ ET ÉTUDE DE FONCTIONS

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

En visite dans une usine de fabrication et de commercialisation de sachets de poudre de cacao des élèves d'une classe de Terminale D reçoivent les informations suivantes :
« La capacité journalière de production de l'usine est comprise entre 1 000 et 5 000 sachets. Toute la production journalière est commercialisée. Une étude a révélé que le bénéfice journalier, exprimé en millions de francs CFA, réalisé pour la production et la vente de x milliers de sachets est modélisé sur l'intervalle [1 ; 5] par la fonction B définie par : $\mathrm{B}(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 9x + 2$ ».
Le Directeur de l'usine veut accroître le bénéfice de l'entreprise. N'ayant pas de personnel qualifié, il demande aux élèves le nombre de sachets à produire en un jour, à l'unité près, pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal. Dès leur retour en classe, les élèves s'organisent pour répondre à la préoccupation du Directeur.

B. CONTENU DE LA LEÇON

I – DERIVABILITE

1 Dérivabilité à gauche-dérivabilité à droite d'une fonction en un point

a) Propriété et définition

- Une fonction numérique f définie sur un intervalle ouvert K est dérivable à gauche en un nombre réel x_0 de K si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $existe\ et\ est finie.$

  Dans ce cas, cette limite est appelée nombre dérivé de f à gauche en x_0 et se note $f_g{}'(x_0)$.

La demi-droite passant par le point M$(x_0, f(x_0))$ et de coefficient directeur ${f_g}'(x_0)$est appelée **demi-tangente à gauche** au point M$(x_0, f(x_0))$.

- Une fonction numérique f définie sur un intervalle ouvert K est dérivable à droite en un nombre réel x_0 de K si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $existe\ et\ est finie$

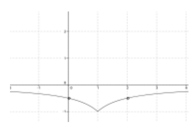
  Dans ce cas, cette limite est appelée nombre dérivé de f à droite en x_0 et se note${f_d}'(x_0)$.
  La demi-droite passant par le point M$(x_0, f(x_0))$ et de coefficient directeur $f_d'(x_0)$ est appelée **demi-tangente à droite** au point M$(x_0, f(x_0))$.

Exercice de fixation

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0; 2\}$

par : $\begin{cases} \forall x \in \,]-\infty; 0[\, \cup \,]0; 1], f(x) = \frac{1}{x-2} \\ \forall x \in [1; 2[\, \cup \,]2; +\infty[, f(x) = \frac{-1}{x} \end{cases}$

et (C) sa courbe représentative donnée ci- contre dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).



1. Etudie la dérivabilité de f à gauche et à droite

en 1

2. interprète graphiquement les résultats.

3. Trace les demi-tangentes à (C) au point d'abscisse 1.

Solution

1. On a :$f(1) = -1$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{\frac{1}{x-2}+1}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1}{x-2} = -1$;

f est donc dérivable à gauche en 1 car $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ est finie et $\mathrm{f}_{\mathrm{g}}'(1) = -1$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{\frac{-1}{x}+1}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1}{x} = 1$

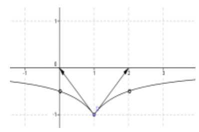
f est donc dérivable à droite en 1 car $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(1)}{x-1}$ est finie et $\mathrm{f}_{\mathrm{d}}'(1) = 1$.

Interprétation graphique :

(C) admet au point d'abscisse 1 une demi-tangente à gauche de coefficient directeur -1 et une demi-tangente à droite de coefficient directeur 1.

Rappel **:** *Connaissant $f_g'(x_0)$, un vecteur directeur de la demi-tangente à gauche au point d'abscisse 1 est $\vec{u}$ (-1 ;- $f_g'(x_0)$).*

Un vecteur directeur de la demi-tangente à gauche en 1 est $\vec{u}$ (-1 ; 1) et un vecteur directeur de la demi-tangente à droite en 1 est $\vec{v}$ (1 ; 1).
On trace alors ces deux demi-tangentes.
Voir figure ci – contre.



b) Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert K et x_0 un nombre réel de K.
f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dériable à gauche et à droite en x_0 et $\mathrm{f}_\mathrm{d}'(x_0) = \mathrm{f}_\mathrm{g}'(x_0)$.

Exercice de fixation

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[, f(x) = x^2 \\ \forall x \in [0; +\infty[, f(x) = x^3 \end{cases}$

Justifie que f est dérivable en 0.

Solution

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$;

f est donc dérivable à gauche en 0 et $\mathrm{f}_\mathrm{g}'(0) = 0$.

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$;

f est donc dérivable à droite en 0 et $\mathrm{f}_\mathrm{d}'(0) = 0$.

Comme $\mathrm{f}_\mathrm{g}'(0) = \mathrm{f}_\mathrm{d}'(0)$, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

c) Demi - tangente verticale

Si $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite infinie à gauche ou à droite en x_0, alors la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal admet une **demi-tangente verticale** au point de coordonnées $(x_0; f(x_0))$.

Exercice de fixation

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \sqrt{x} - x$.
On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Etudie la dérivabilité de f en 0 puis interprète graphiquement le résultat obtenu.

Solution

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{\sqrt{x}-x}{x}$

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{\sqrt{x}}{x} - 1 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 0 car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ est infinie.

Interprétation graphique :(C) admet en son point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale.

2– Dérivabilité sur un intervalle

a)Définition

- Une fonction numérique f est dérivable sur un intervalle ouvert K si f est dérivable en tout nombre réel de K.
- Une fonction numérique f est dérivable sur un intervalle fermé $[a\,;b]$ si f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\,;b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b.

b) Exemples

- ✓ La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
- ✓ Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3 – Dérivabilité d'une fonction composée

a) Propriété

Soit K un intervalle ouvert ; f et g deux fonctions numériques telles que fog est définie sur K ; $x_0 \in$ K.
Si g est dérivable en x_0 et f dérivable en $g(x_0)$ alors la fonction $f \circ g$ est dérivable en x_0 et :
$(f \circ g)'(x_0) = g'(x_0) \times (f' \circ g)(x_0) = g'(x_0) \times f'[g(x_0)]$.

Exercice de fixation

Soient les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :$f(x) = \frac{3-x}{x-2}$ et $g(x) = x - \frac{1}{x} + 2$.
Démontre que $f \circ g$ est dérivable en 3 et calcule$(f \circ g)'(3)$.

Solution

g est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$, donc g est dérivable en 3.
f est dérivable sur $]-\infty\,;2[$ et sur $]2\,;+\infty[$.
$g(3) = \frac{14}{3}$, comme $g(3) \neq 2$ donc f est dérivable en $g(3)$.
On conclut que $f \circ g$ est dérivable en 3.
Pour tout $x \neq 0$, $g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$. Donc $g'(3) = \frac{10}{9}$.
Pour tout $x \neq 2$, $f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$. Donc $f'(\frac{14}{3}) = -\frac{9}{64}$.
On conclut que : $(f \circ g)'(3) = \frac{10}{9} \times (-\frac{9}{64}) = -\frac{5}{32}$.

b) Conséquences

u est une fonction dérivable sur un intervalle K.

Fonctions	**Dérivées**
$u^n \ (n \in \mathbb{Q}^*)$	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}\, avec\ u > 0$ sur K	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
$\tan(u)\ avec\ cos(u) \neq 0$ Sur K	$u' \times [1 + tan^2(u)]$ ou $\frac{u'}{cos^2(u)}$

Exercices de fixation

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Calcule sa dérivée.

a) $f(x)=(x^2 - 3x + 1)^5$; b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 5}$; c) $f(x) = \cos(x^2)$

d) $f(x) = \sin(\sin x)$; e) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Solution

a) $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5(2x-3)(x^2 - 3x + 1)^4$.

b) $\forall\ x \in \mathbb{R}$,$f'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+5}}$.

$c)\ \forall\ x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2xsin(x^2)$.

$d)\ \forall\ x \in \mathbb{R}, f'(x) = cosx \times cos(sinx)$.

e) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$ par : $f(x) = (4x-1)\sqrt{4x-1}$.

1. Etudie la dérivabilité de f en $\frac{1}{4}$.

2. On admet que f est dérivable sur $\left]\frac{1}{4}; +\infty\right[$.Calcule $f'(x)$ pour tout x *de* $\left]\frac{1}{4}; +\infty\right[$

Solution

1. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{4}} \dfrac{f(x) - f(\frac{1}{4})}{x - \frac{1}{4}} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{4}} \dfrac{(4x-1)\sqrt{4x-1}}{x - \frac{1}{4}} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{4}} \left(4\sqrt{4x-1}\right) = 0$

donc f est dérivable en $\dfrac{1}{4}$ car $\lim\limits_{x \to \frac{1}{4}} \dfrac{f(x) - f(\frac{1}{4})}{x - \frac{1}{4}}$ est finie; $f'\left(\dfrac{1}{4}\right) = 0$.

2.f est dérivable sur $\left]\frac{1}{4};+\infty\right[$ et $\forall\, x \in \left]\frac{1}{4};+\infty\right[$, $f'(x) = 6\sqrt{4x-1}$.

4 – Dérivabilité d'une bijection réciproque

a) Propriété

Soit K un intervalle, f une fonction numérique dérivable et strictement monotone sur K ,
$x_0 \in$ K et $y_0 = f(x_0)$.
Si $f'(x_0) \neq 0$ alors la bijection réciproque f^{-1} de f est dérivable en y_0 et
$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Point méthode

Pour calculer le nombre dérivé de f^{-1} en y_0, on peut procéder comme suit :

- On détermine $x_0 \in K$, tel que $f(x_0) = y_0$;
- On calcule $f'(x_0)$ et on vérifie que $f'(x_0) \neq 0$;
- On conclut alors que f^{-1} est dérivable en y_0 ;
- On calcule enfin $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Exercice de fixation

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x^2 - x$.
1. Démontre que f réalise une bijection de $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ sur $\left[-\frac{1}{4};+\infty\right[$.
2. Soit g la restriction de f à $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$.
Démontre que g^{-1} est dérivable en 2 et calcule $(g^{-1})'(2)$.

Solution

1.f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x élément de $\mathbb{R}$,$f'(x) = 2x - 1$.
$f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$ et $\forall\, x \in]-\infty;\frac{1}{2}[$, $f'(x) < 0$.

On a *:* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 - x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.
Ainsi,f est continue et strictement décroissante sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ donc f réalise une bijection de $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ sur
$f\left(\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]\right) = \left[-\frac{1}{4};+\infty\right[$.
2. La résolution de l'équation $x \in \left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$, $g(x) = 2$ donne *:* $x = -1$.
On a: $g(-1) = 2$; $g'(-1) = -3$ *;* comme $g'(-1) \neq 0$,donc la bijection réciproque g^{-1} de g est dérivable *en 2 et on a :* $(g^{-1})'(2) = \frac{1}{g'(-1)} = -\frac{1}{3}$.

5 – Dérivées successives

Définition

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle K.

- Si *f* est dérivable sur K, alors sa fonction dérivée est la dérivée première de *f*.
  On la note :f' *ou* $\frac{df}{dx}$.

- Si f' est dérivable sur K, alors sa fonction dérivée est la dérivée seconde de f.
  On la note : f'' *ou* $\frac{d^2 f}{dx^2}$ ou $f^{(2)}$.
- De proche en proche, Si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur K, alors sa fonction dérivée est la dérivée n$^{\text{ième}}$ de f ou la dérivée d'ordre n de f.
  On la note : $f^{(n)}$ *ou* $\frac{d^n f}{dx^n}$.

EXERCICE DE FIXATION

Détermine les 4 premières dérivées successives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$.

SOLUTION

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 - 4x$;

$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 6x - 4$;

$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(3)}(x) = 6$;

$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(4)}(x) = 0$.

6 – Inégalités des accroissements finis

Propriété 1

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et f une fonction numérique dérivable sur $[a\,;b]$.

S'il existe deux nombres réels m et M tels que : $\forall x \in [a;b],\ m \leq f'(x) \leq M$,

alors : $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

Exercice de fixation

Justifie que : $\frac{1}{\sqrt{19}} \leq \sqrt{19} - \sqrt{17} \leq \frac{1}{\sqrt{17}}$

Solution

On pose $f(x) = \sqrt{x}$.

f est dérivable sur $\left[\sqrt{17};\sqrt{19}\right]$ et $\forall x \in \left[\sqrt{17};\sqrt{19}\right], f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$\forall x \in \left[\sqrt{17};\sqrt{19}\right],\ \sqrt{17} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{19}$, donc $\frac{1}{2\sqrt{19}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{17}}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$\frac{1}{2\sqrt{19}}(19-17) \leq f(19) - f(17)) \leq \frac{1}{2\sqrt{17}}(19-17)$; Donc $\frac{1}{\sqrt{19}} \leq \sqrt{19} - \sqrt{17} \leq \frac{1}{\sqrt{17}}$.

Propriété 2

Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle I.

S'il existe un nombre réel M tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq M$, alors pour tous nombres réels a *et* b de I, on a : $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$.

Exercice de fixation

Démontre que, pour tous nombres réels x et y, on a : $|\cos(x) - \cos(y)| \leq |x-y|$.

Solution

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \cos(t)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = -\sin(t)$.

On a :$|f'(t)| \leq 1$ pour tout nombre réel t.
Donc d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous nombres réels *x* et y,
on a :$|f(x) - f(y)| \leq 1.|x - y|$.
Comme $f(x) = \cos(x)\ et\ f(y) = \cos(y)$, donc pour tous nombres réels *x* et y,
on a : $|\cos(x) - \cos(y)| \leq |x - y|$

II – ETUDE DE FONCTIONS

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur ℝ par :$\begin{cases} f(x) = x^2 + x\ si\ x < 0 \\ f(x) = \sqrt{x} - x\ si\ x \geq 0 \end{cases}$

On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
1. Etudie la continuité de f en 0.
2. Etudie la dérivabilité de f en 0 puis interprète graphiquement les résultats obtenus.
3. a) Calcule les limites de *f* en −∞ et en +∞.
b) Justifie que la courbe (C) admet en −∞ une branche parabolique dont on précisera la direction.
4. On admet que *f* est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   Etudie les variations de *f* et dresse son tableau de variation.
5. Trace (C) et les demi-tangentes obtenues dans la question b).

Solution

1. $f(0) = 0$

$\underset{\substack{x\to 0 \\ <}}{lim} f(x) = \underset{x\to 0}{lim}(x^2 + x) = 0$

$\underset{\substack{x\to 0 \\ >}}{lim} f(x) = \underset{x\to 0}{lim}(\sqrt{x} - x) = 0$

$\underset{\substack{x\to 0 \\ <}}{lim} f(x) = \underset{\substack{x\to 0 \\ >}}{lim} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0.

$$2. \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} (\frac{x^2 + x}{x}) = \lim_{x\to 0} (x + 1) = 1$$

$$f\ est\ donc\ dérivable\ à\ gauche\ en\ 0\ car\ \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\ \ est\ finie\ et\ f'_g(0)\ =\ 1.$$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} (\frac{\sqrt{x} - x}{x}) = \lim_{x\to 0} (\frac{\sqrt{x}}{x} - 1) = \lim_{x\to 0} (\frac{1}{\sqrt{x}} - 1) = +\infty$$

$$f\ n'est\ pas\ dérivable\ à\ droite\ en\ 0\ car\ \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\ est\ infinie$$

Conclusion *: f n'est pas dérivable en 0.*
Interprétation graphique *: (C) admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente à gauche de coefficient directeur 1 et à droite une demi-tangente verticale.*
3*.a)* ***Limites de f en $-\infty$ et $+\infty$***

$\underset{x\to -\infty}{lim} f(x) = \underset{x\to -\infty}{lim} (x^2 + x) = \underset{x\to -\infty}{lim} (x^2) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})\right) = -\infty \; car \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x}) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(1-\sqrt{x}) = -\infty \end{cases}$$

b) On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}(1+x) = -\infty.$

Donc (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ).

4. *f est dérivable sur* $]-\infty;0[$ *et sur* $]0\,;\,+\infty[$

$$\begin{cases} \forall x \in\,]-\infty;0[, f'(x) = 2x+1 \\ \forall x \in\,]0\,;\,+\infty[, f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 1 = \dfrac{1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \end{cases}$$

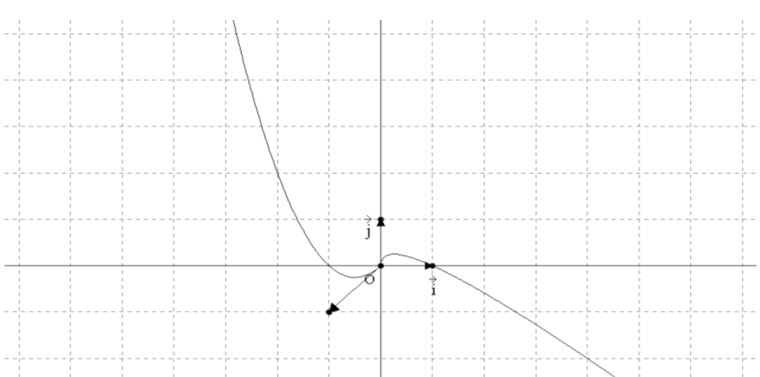
- $x \in\,]-\infty;0[,\ f'(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$
  $f'(x) > 0 \iff x \in \left]-\frac{1}{2}\,;0\right[$ *et* $f'(x) < 0 \iff x \in \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$. *Ainsi, f est strictement croissante sur* $\left[-\frac{1}{2};0\right]$ *et f est strictement décroissante sur* $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$.

- *Pour tout* $x \in\,]0\,;\,+\infty[\,, 2\sqrt{x} > 0$ *donc* $f'(x)$ *a le signe de* $1-2\sqrt{x}$.

$$f'(x) = 0 \iff 1-2\sqrt{x} = 0 \iff x = \frac{1}{4}$$

  $f'(x) > 0 \iff 1-2\sqrt{x} > 0 \iff 0 < x < \frac{1}{4}$.
  Ainsi, f est strictement croissante sur $\left[0;\frac{1}{4}\right]$ *et f est strictement décroissante sur* $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	$-\infty$



Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) (l'unité graphique est 2 cm).
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)$ =$x + \sqrt{|x^2 - 1|}$.
On note (C) la courbe représentative de$h$.

1.Justifie que :$\begin{cases} \forall\, x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[\, , h(x) = x + \sqrt{x^2 - 1} \\ \forall\, x \in [-1; 1]\, , h(x) = x + \sqrt{1 - x^2} \end{cases}$

2Démontre que (C) admet aux points d'abscisses-1 et 1 des demi-tangentes verticales.
3. Démontre que la droite (OI) est une asymptote à (C) en $-\infty$.
4.a) Calcule la limite de h en $+\infty$.
b) Démontre que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
c) Justifie que (C) est au-dessous de (D)sur $\left]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[$.
5.a) On admet que $h$est dérivable sur les intervalles $]-\infty; -1[$et$]1; +\infty[$; et pour $|x| > 1$, $|x| > \sqrt{x^2 - 1}$.
Etudie les variations de $h$sur les intervalles $]-\infty; -1[$et$]1; +\infty[$.
b) On admet que h est dérivable sur l'intervalle$]-1; 1[$.
Justifie que h est croissante sur l'intervalle $\left[-1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$.
c) Dresse le tableau de variation de la fonction h sur $\mathbb{R}$
6. Trace(D) et (C).
7. Soit $k$la restriction de h à$]-\infty\,;\ -1]$.
a) Justifie que k réalise une bijection de $]-\infty\,;\ -1]$ sur [-1 ; 0[.
b) Calcule $k\,(-\sqrt{2}\,)$.
c) Soit k^{-1} la bijection réciproque de k.
Démontre que k^{-1} est dérivable en $1 - \sqrt{2}$ et calcule$(k^{-1})'(1 - \sqrt{2})$.

Solution

1.

x	$-\infty$ $\quad -1$		1 $\quad +\infty$
$x^2 - 1$	$+$ $\quad 0$	$-$	0 $\quad +$
$\lvert x^2 - 1\rvert$	$x^2 - 1$	$1 - x^2$	$x^2 - 1$
$h(x)$	$x + \sqrt{x^2 - 1}$	$x + \sqrt{1 - x^2}$	$x + \sqrt{x^2 - 1}$

Donc :$\begin{cases} \forall\, x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[\, , h(x) = x + \sqrt{x^2 - 1} \\ \forall\, x \in [-1; 1]\, , h(x) = x + \sqrt{1 - x^2} \end{cases}$

2.Dérivabilité de h à gauche en – 1 :

$$\lim_{\substack{x\to-1\\<}} \frac{h(x)-h(-1)}{x+1} = \lim_{\substack{x\to-1\\<}} \frac{x+\sqrt{x^2-1}+1}{x+1} = \lim_{\substack{x\to-1\\<}} \left(1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}\right)$$

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} (x-1) = -2$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$,*donc* $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} 1+\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} = -\infty$.

D'où : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} \frac{h(x)-h(-1)}{x+1} = -\infty$ *donc hn'est pas dérivable à gauche en* -1 .

Par conséquent, (C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse -1.

Dérivabilité de h à droite en 1

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to1\\>}} \frac{x+\sqrt{x^2-1}-1}{x-1} = \lim_{\substack{x\to1\\>}} \left(1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}\right)$$

$$= \lim_{\substack{x\to1\\>}} 1+\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$$

car $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} (x+1) = 2$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = +\infty$ *donc hn'est pas dérivable à droite en* 1

Par conséquent, (C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 1.

3.

$\forall\, x < -1, h(x) = \frac{[x+\sqrt{x^2-1}][x-\sqrt{x^2-1}]}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-1} = +\infty$ *car* $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2-1) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} (-\sqrt{x^2-1}) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x-\sqrt{x^2-1}\right) = -\infty$

Par suite $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = 0$; *Ainsi,* $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$

D'où la droite (OI) est asymptote à (C) en $-\infty$.

4.a)

Ona : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} = +\infty$ *car* $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-1) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{y\to+\infty} \sqrt{y} = +\infty$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = +\infty$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

b) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} [h(x)-2x]$

$\forall\, x>1$, $h(x)-2x = \sqrt{x^2-1}-x = \frac{[\sqrt{x^2-1}-x][\sqrt{x^2-1}+x]}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{-1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2-1} = +\infty$ *d'où* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x+\sqrt{x^2-1}} = 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} [h(x)-2x] = 0$.

D'où la droite (D) d'équation y = $2x$ *est asymptote à (C) en +∞.*

c) *Etudions le signe de* $h(x)-2x$.

● *Pour toutx* $\in \left]\frac{\sqrt{2}}{2};1\right[$,*on a :* $h(x)-2x = \sqrt{1-x^2}-x$.

$$h(x) - 2x \le 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} \le x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^2 \ge 0 \\ x \ge 0 \\ 1 - x^2 \le x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x \ge 0 \\ 1 - 2x^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x \ge 0 \\ x \in \left]-\infty ; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty\right[\end{cases}$$ donc, $h(x) - 2x \le 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2} ; 1\right]$

● *Pour tout* $x \in [1 ; +\infty[$*, on a :*

$h(x) - 2x = \sqrt{x^2-1} - x = \frac{[\sqrt{x^2-1}-x][\sqrt{x^2-1}+x]}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{-1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

Pour tout $x \in [1 ; +\infty[$, $\sqrt{x^2-1} \ge 0$ *et* $x > 0$ *donc* $\forall x \in [1 ; +\infty[, \sqrt{x^2-1} + x > 0$.

Par suite, pour tout $x \in [1 ; +\infty[$, $h(x) - 2x < 0$.

Ainsi **:** $\forall x \in \left]\frac{\sqrt{2}}{2} ; 1\right[$, *et* $\forall x \in [1 ; +\infty[$, $h(x) - 2x < 0$.

On en déduit que (C) est au-dessous de (D) sur $\left]\frac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty\right[$.

5. a) $\forall x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$, $h'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

$\forall x \in]1 ; +\infty[$, $h'(x) > 0$ *donc hest strictement croissante sur* $]1 ; +\infty[$.

$\forall x \in]-\infty ; -1[$, $h'(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}$.$\forall x \in]-\infty ; -1[, \sqrt{x^2-1} > 0$ *donc le signe de* $h'(x)$

est celui de $\sqrt{x^2-1} + x$. *Or* $|x| > \sqrt{x^2-1}$ *, donc pour* $x \in]-\infty ; -1[$, $-x > \sqrt{x^2-1}$,

d'où pour $x \in]-\infty ; -1[, \sqrt{x^2-1} + x < 0$.

Donc $\forall x \in]-\infty; -1[, h'(x) < 0$ *et par suite h est strictement décroissante sur* $]-\infty ; -1[$.

On conclut donc que h est strictement décroissante sur $]-\infty ; -1[$ *et strictement croissante sur* $]1 ; +\infty[$.

b) $\forall x \in]-1 ; 1[$, $h'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

donc $\forall x \in]-1; 0], h'(x) > 0$.

$\forall x \in]0 ; 1[, h'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\forall x \in]0 ; 1[, \sqrt{1-x^2} > 0$ *donc le signe de* $h'(x)$*est celui de* $\sqrt{1-x^2} - x$.

h'(x)$\le 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} - x \le 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} \le x \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2} ; 1\right]$. (D'après la question 4.c))

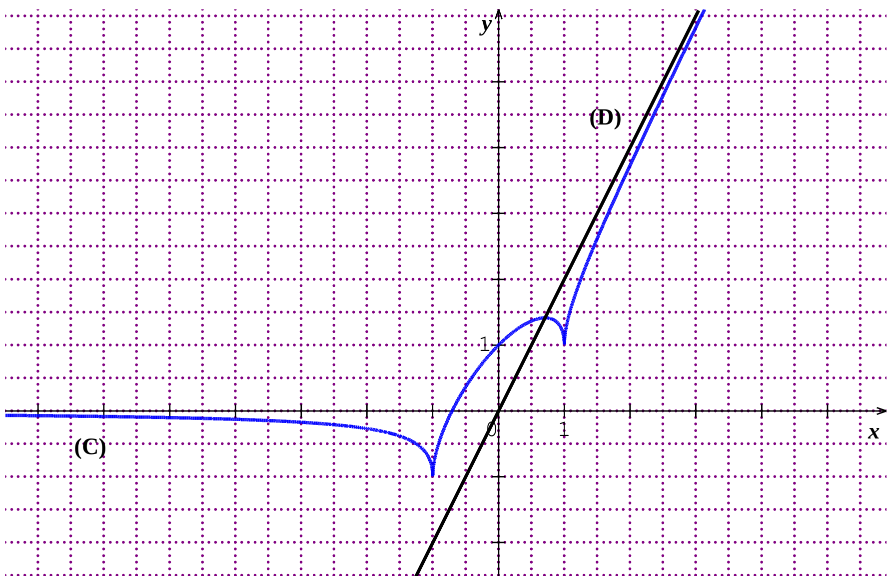
d'où $\forall x \in \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$; $h'(x) \ge 0$.

Donc h est décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{\sqrt{2}}{2} ; 1\right]$ et croissante sur $\left[-1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

c)Tableau des variations de h

x	$-\infty$		-1		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		$+$	0	$-$		$+$	
$h(x)$	0	↘	-1	↗	$\sqrt{2}$	↘	1	↗	$+\infty$

*6.*Représentation graphique



7.a) h est continue et strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,-1]$. k étant la restriction de h à $]-\infty\,;\,-1]$ donc k est continue et strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,-1]$.

D'où k réalise une bijection de $]-\infty\,;\,-1]$ sur $k(]-\infty\,;\,-1]) = [-1; 0[$.

b) $k(-\sqrt{2}\,) = 1 - \sqrt{2}$.

c) $k(-\sqrt{2}\,) = 1 - \sqrt{2}$ et $k'(-\sqrt{2}\,) = 1 - \sqrt{2}$. Comme $k'(-\sqrt{2}\,) \neq 0$ donc k^{-1} est dérivable en $1 - \sqrt{2}$ et on a :$(k^{-1})'\left(1 - \sqrt{2}\right) = \frac{1}{1-\sqrt{2}} = -1 - \sqrt{2}$.

Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J).

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)$ =tan$\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

On note (C) la courbe représentative de$f$.

1. Détermine, D_f, l'ensemble de définition de la fonction f.
2. a) Justifie que f est périodique de période 2.
   b) Justifie que f est impaire.
   c) Démontre que la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à (C).

3. a) Démontre que, $\forall\, x \in D_f, f'(x) = \frac{\pi}{2}(1 + tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right))$.
   b) Dresse le tableau de variation de f sur $[0; 1[$.
4. Trace (C) sur $[0; 1[$ puis sur $]-3; 3[$.

Solution

1. Détermine D_f

$x \in D_f \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2}x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$

Donc$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1 + 2k\}, k \in \mathbb{Z}$

2. a) Justifions que f est périodique de période 2.
   Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1 + 2k\}, k \in \mathbb{Z}$ on a : $x \neq 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$
   Donc $x + 2 \neq 3 + 2k, k \in \mathbb{Z};\ x + 2 \neq 1 + 2k', k' \in \mathbb{Z};$
   D'où pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1 + 2k\}, k \in \mathbb{Z}$, $x + 2 \in \mathbb{R} \setminus \{1 + 2k\}, k \in \mathbb{Z}$
   $$f(x+2) = \tan\left(\frac{\pi}{2}(x+2)\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2}x + \pi\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$
   $f(x + 2) = f(x)$, donc f est périodique de période 2.

   b) Justifions que f est impaire.
   Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1 + 2k\}, k \in \mathbb{Z}$ on a : $x \neq 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$
   Donc $-x \neq -1 - 2k, k \in \mathbb{Z};\ -x \neq 1 - 1 - 1 - 2k, k \in \mathbb{Z}$
   D'où $-x \neq 1 + 2(-1 - k), k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire $-x \neq 1 + 2k', k' \in \mathbb{Z}$
   D'où pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1 + 2k\}, k \in \mathbb{Z}$, $-x \in \mathbb{R} \setminus \{1 + 2k\}, k \in \mathbb{Z}$
   $$f(-x) = \tan\left(-\frac{\pi}{2}x\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$
   $f(-x) = -f(x)$, donc $f$est impaire.

   c) Démontrons que la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à (C).
   $$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ <}} \tan(X) = +\infty$$
   et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ >}} \tan(X) = -\infty$
   Donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à (C).

3. a) Démontrons que, $\forall\, x \in D_f, f'(x) = \frac{\pi}{2}(1 + tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right))$.

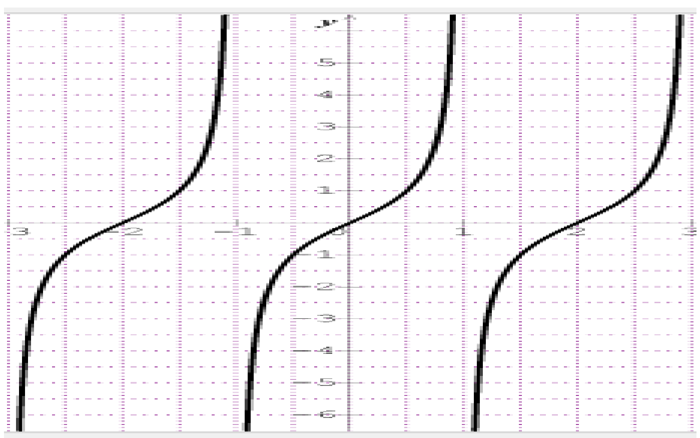
$\forall\, x \in D_f, f'(x) = \left(\frac{\pi}{2}x\right)'\left(1 + tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) = \frac{\pi}{2}(1 + tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right))$.

   b) Dressons le tableau de variation de f sur $[0; 1[$.

   $\forall\, x \in D_f, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0; 1[$.

x	0		1
$f'(x)$		$+$	||
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ||

4. Traçons (C) sur $[0; 1[$ puis sur $]-3; 3[$.



C. SITUATIONS COMPLEXES

Situation 1

En visite dans une usine de fabrication et de commercialisation de sachets de poudre de cacao des élèves d'une classe de Terminale scientifique reçoivent les informations suivantes :

« La capacité journalière de production de l'usine est comprise entre 1 000 et 5 000 sachets. Toute la production journalière est commercialisée. Une étude a révélé que le bénéfice journalier, exprimé en millions de francs CFA, réalisé pour la production et la vente de x milliers de sachets est modélisé sur l'intervalle [1 ; 5] par la fonction B définie par : $\mathrm{B}(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 9x + 2$ ».

Le Directeur de l'usine veut accroître le bénéfice de l'entreprise. N'ayant pas de personnel qualifié, il te demande le nombre de sachets à produire en un jour, à l'unité près, pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal.

En argumentant, détermine le nombre de sachets de poudre de cacao à produire pour obtenir un bénéfice maximal.

Solution

Pour répondre à la préoccupation du Directeur de l'usine,

- J'étudie les variations de la fonction B modélisant le bénéfice journalier de l'usine.
- Je détermine la dérivée de B
- J'étudie le signe de la dérivée de B
- Je détermine le zéro de la dérivée de B sur l'intervalle
- Je donne le nombre de sachets de poudre de cacao à produire pour obtenir le bénéfice journalier maximal de l'usine.

Le bénéfice journalier, exprimé en millions de francs CFA, réalisé pour la production et la vente de x milliers de sachets est modélisé sur l'intervalle [1 ; 5] par la fonction B définie par :

$\mathrm{B}(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 9x + 2$. Etudions les variations de B.

- Dérivée de B :
  $\mathrm{B}'(x) = -x^2 + 9 = -(x-3)(x+3)$

- Signe de la dérivée de B

x	1		3		5
$B'(x)$		$-$	0	$+$	

Pour $x \in [1; 5], x + 3 > 0$ donc $\mathrm{B}'(x)$ a le même signe que $-(x-3)$. Or

$$-(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow x - 3 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow x \leq 3$$

Donc pour $x \in [1; 3]$, $\mathrm{B}'(x) \geq 0$ et
pour $x \in [3; 5]$, $\mathrm{B}'(x) \leq 0$

- Les variations de la fonction B.
  B est croissante sur l'intervalle $[1; 3]$ et décroissante sur l'intervalle$[3; 5]$.
- B atteint son maximum en 3. Ce maximum est B(3) = 20.

Le nombre de sachets de poudre de cacao à produire pour obtenir le bénéfice journalier maximal de l'usine est 3000.

Le bénéfice journalier dans ce cas est d'environ 20 millions.

D. EXERCICES CORRIGES

Exercice 1

f est la fonction continue sur $\mathbb{R}$ et définie par : $\begin{cases} f(x) = 1 - x^2 \text{si} \quad x \in]-\infty; -1[\\ f(x) = \frac{2x+2}{x+2} \text{si} \quad x \in [-1; +\infty[\end{cases}$

Etudie la dérivabilité de f en –1.

Solution

Dérivabilité de f à gauche en -1 :

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \left(\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}\right) = \lim\limits_{x \to -1} \left(\frac{1-x^2-0}{x+1}\right) = \lim\limits_{x \to -1} (1-x) = 2$ donc f est dérivable à gauche en -1 et $f'_g(-1) = 2$.

Dérivabilité de f à droite en -1 :

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left(\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}\right) = \lim\limits_{x \to -1} \left(\frac{\frac{2x+2}{x+2}-0}{x+1}\right) = \lim\limits_{x \to -1} \left(\frac{2}{x+2}\right) = 2$ donc f est dérivable à droite en -1 et $f'_d(-1) = 2$.

On a $f'_g(-1) = f'_d(-1)$ par suite f est dérivable en -1.

Exercice 2

k est une fonction dérivable sur un intervalle $[a; b]$ telle que $\forall x \in [a; b]$, $|k'(x)| < 0{,}2$.

Justifie que $k(b) \in]k(a) - 0{,}2(b-a); k(a) + 0{,}2(b-a)[$.

SOLUTION

k est une fonction dérivable sur un intervalle $[a; b]$ telle que $\forall x \in [a; b]$, $|k'(x)| < 0{,}2$.

D'après l'inégalité des accroissements finis $|k(b) - k(a)| < 0{,}2(b-a)$.

Par suite : $-0{,}2(b-a) < k(b) - k(a) < 0{,}2(b-a)$

$k(a) - 0{,}2(b-a) < k(b) < k(a) + 0{,}2(b-a)$

Donc $k(b) \in]k(a) - 0{,}2(b-a); k(a) + 0{,}2(b-a)[$.

Exercice 3

Soit n un entier naturel.

Démontre par récurrence que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

Solution

Pour $n = 0$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $cos^{(0)}(x) = \cos(x) = \cos\left(x + 0 \times \frac{\pi}{2}\right)$.

Supposons l'égalité à un rang k; $k \in \mathbb{N}$.

Au rang $k+1$,

$\forall x \in \mathbb{R}$, $cos^{(k+1)}(x) = \left(cos^{(k)}\right)'(x) = cos'\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$.

$= \cos\left(x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 4

Soit la bijection dérivable f : $\begin{array}{l} \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \tan(x) \end{array}$

et φ sa bijection réciproque.

1. Démontre que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
2. Démontre que $\forall x \in \ ]0; +\infty[$, $\varphi(x) + \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.
3. Détermine $\varphi(x) + \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \in \ ]-\infty; 0[$.

Solution

1. f est une bijection dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, f'(x) = 1 + tan^2(x)$.

$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, f'(x) > 0$ donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = \frac{1}{f'(\varphi(x))}$.

Or $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[, f'(x) = 1 + f^2(x)$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'\left(\varphi(x)\right) = 1 + f^2(\varphi(x)) = 1+x^2$.

D'où $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

2. Posons :

$\forall x \in \ ]0; +\infty[, u(x) = \varphi(x) + \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$

Dérivons la fonction u

$\forall x \in \ ]0; +\infty[, u'(x) = \varphi'(x) - \frac{1}{x^2}\ \varphi'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$

$\forall x \in \ ]0; +\infty[, u'(x) = 0$ donc la fonction u est constante sur $]0; +\infty[$.

Par suite $\forall x \in \ ]0; +\infty[, u(x) = u(1) = \varphi(1) + \varphi\left(\frac{1}{1}\right) = 2 \times \varphi(1) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

3. f étant impaire, φ est impaire.

$x \in \ ]-\infty; 0[\iff -x \in \ ]0; +\infty[$.

$\varphi(x) + \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = -\varphi(-x) - \varphi\left(-\frac{1}{x}\right) = -\left(\varphi(-x) + \varphi\left(-\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{\pi}{2}$.

Donc $\varphi(x) + \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$. pour $x \in \ ]-\infty; 0[$.

Exercice 5

f est la fonction de IR vers IR définie par : $f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 4 cm.

1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. Etudie la dérivabilité de f en 1 puis interprète graphiquement le résultat.
3. Calcule la limite de f en -1 puis interprète graphiquement le résultat.
4. Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.

5. Trace la courbe (C).
6. Démontre que f réalise une bijection de $]-1\,;1]$ sur $[0;+\infty[$.
7. Justifie que la bijection réciproque f^{-1} de f est dérivable en 1 et calcule $(f^{-1})'(1)$.
8. Trace la courbe représentative (C') de f^{-1} sur le même graphique que (C).

Solution

1. $D_f = \{\, x \in IR /\ 1+x \neq 0 \ et\ \frac{1-x}{1+x} \geq 0 \ \}$.

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
$1+x$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{1-x}{1+x}$	$-$		$+$	0	$-$

Donc: $D_f =]-1;1]$.

2. Dérivabilité de f en 1.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{(x-1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{-1}{(x+1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = -\infty$$

$$car\ \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} (x+1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = 0 \ \ et\ (x+1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \geq \ 0 \ \ pour\ x \in]-1\,;1]$$

$$Ainsi\ f\ n'est\ pas\ dérivable\ \ en\ 1\ car\ \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \ \ n'est\ \ pas\ finie.$$

Interprétation graphique

(C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 1.

3. Limite en -1

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{1}{1+x} = +\infty\ et\ \ \lim_{\substack{x\to -1\\ >}} (1-x) = 2\ \ donc\ \ \lim_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{1-x}{1+x} = +\infty.$$

$$Par\ ailleurs\ \ \ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty\ , donc\ :\ \lim_{\substack{x\to -1\\ >}} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = +\infty$$

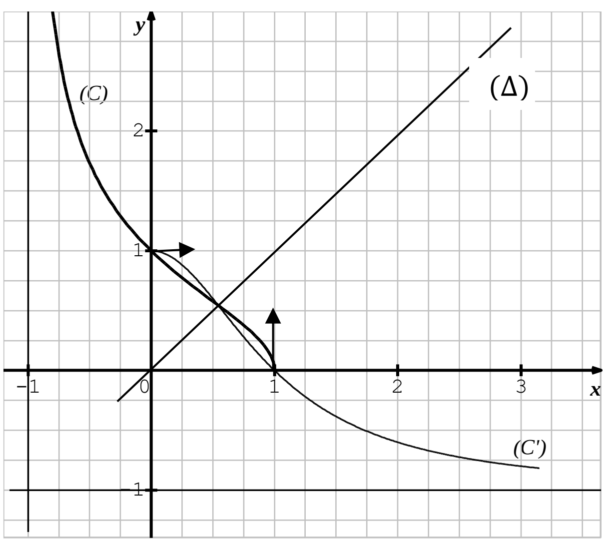
$$D'où\ \lim_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x) = +\infty. La\ droite\ (D)\ d'équation\ x\ =\ -1\ est\ asymptote\ à\ (C).$$

4. *f est dérivable sur $]-1;1[$.Pour tout $x \in]-1;1[$,* $f'(x) \ = \dfrac{\frac{-(x+1)-(1-x)}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = \dfrac{-1}{(1+x)^2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$

$\forall x \in]-1;1[, -1 \ < \ 0$ *et* $(x+1)^2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} > 0$. *Donc* $\forall x \in]-1;1[,\ f'(x) \ < \ 0$. *$f$ est donc strictement décroissante sur* $]-1;1[$,

x	-1		1
$f'(x)$		-	
$f(x)$		$+\infty$ ↘	0

5. Courbe représentative de f.



6. f *est continue et strictement décroissante sur* $]-1;1]$ *donc* f *réalise une bijection de* $]-1;1]$ *sur* $f(]-1;1]) = [0;+\infty[$.

7. On a : $f(0) = 1$ *et* $f'(0) = -1$ *; comme* $f'(0) \neq 0$ *donc la bijection réciproque* f^{-1} *de* f *est dérivable en 1 et on a :* $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = -1$.

8. *Les courbes représentatives (C') et (C) sont symétriques par rapport à la droite* (Δ) *d'équation* $y = x$ *(voir figure).*

IV. EXERCICES

I – EXERCICES DE FIXATION

Exercice 1

f est une fonction dérivable sur l'intervalle I. Dans chacun des cas suivants, calcule $f'(x)$ pour tout x de I.

a) $f(x) = -3x^3 + 4x^2 - 7x + 2$, I=IR; b) $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + 1$, I = IR;

c) $(x) = 3x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{7}{x^3}$, $I =]0; +\infty[$; d) $f(x) = 2x^2\sqrt{x}$, $I =]0; +\infty[$;

e) $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$, $I =]-\infty; -1[$; f) $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^5$, I= IR ;

g) $f(x) = \sqrt{4x-1}$, $I = \left]\frac{1}{4}; +\infty\right[$; h) $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$, $I =]1; +\infty[$;

i) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$, I=IR; j) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{3x+1}}$, $I = \left]\frac{-1}{3}; +\infty\right[$;

k) $f(x) = x\cos 2x$, I= IR; l) $f(x) = \frac{2}{(1-2x)^2}$, $I = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$;

m) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, I=IR; n) $f(x) = x^3(1-x)^2$, I=IR;

o) $f(x) = \sin x\cos^3 x$, I=IR; p) $f(x) = \frac{x}{2} + 1 - \frac{2}{(x-1)^2}$, $I =]-\infty; 1[$.

Exercice 2

f est la fonction définie sur $]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$

Etudie la dérivabilité de f en -2 et en 1.

Exercice 3

Démontre que :

1. $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[$, $\tan x \geq x$.
2. $\forall x \in]0; +\infty[$, on a $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Exercice 4

Soit la fonction $f : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1;1]$, $x \longmapsto \sin x$

1. Démontre que f admet une bijection réciproque φ.
2. Démontre que : $\forall x \in]-1; 1[$, $\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

II – EXERCICES DE RENFORCEMENT /APPROFONDISSEMENT

Dans les exercices qui suivent, on note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Exercice 5

f est la fonction définie sur IR par : $f(x) = x|x-3|+2$.

1. Etudie la continuité de f en 3.
2. Etudie la dérivabilité de f en 3. Interprète graphiquement le résultat.
3. Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
4. Trace (C).

Exercice 6

f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x}$.

1. Etudie la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.

2. Calcule les limites de $f(x)$ et $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$ puis interprète graphiquement les résultats.
3. Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
4. Trace (C).

Exercice 7

f est la fonction de IR vers IR définie par: $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$

1. Précise l'ensemble de définition de f
2. Etudie la continuité de f en 0.
3. Démontre que (C) admet au point d'abscisse 0 une tangente dont on précisera une équation.
4. Etudie la parité de f et en donner une conséquence graphique.
5. Calcule la limite de f en $+\infty$. Interpréte graphiquement le résultat.
6. Etudie les variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$ et dresse le tableau de variation de f.
7. Trace la courbe (C).

Exercice 8

f est la fonction définie sur IR-{-1} par : $f(x) = \frac{x^2+|x-2|}{x+1}$

1. Etudie la continuité de f en 2.
2. Etudie la dérivabilité de f en 2. Interprète graphiquement les résultats.
3. Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
5.
   a) Démontre que les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y = x - 2$ et $y = x$ sont asymptotes à (C) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b) Etudie la position de (C) par rapport à (D_1) sur $]-\infty; -1[\cup]-1; 2]$.
   c) Etudie la position de (C) par rapport à (D_2) sur $[2; +\infty[$.
6. Trace (D_1), (D_2) et (C).

Exercice 9

f est la fonction de IR vers IR définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$.

Partie A

1. Justifie que l'ensemble de définition de f est $]-\infty; -2]\mathrm{U}[-1; +\infty[$.
2. Etudie la dérivabilité de f en -1 et en -2 puis interpréte graphiquement les résultats.
3. Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
5. Démontre que les droites (D_1) : $y = -x - \frac{3}{2}$ et (D_2) : $y = x + \frac{3}{2}$ sont asymptotes à (C) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.
6. Démontre que la droite (Δ) d'équation $x = -\frac{3}{2}$ est un axe de symétrie de (C).
7. Donne une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
8. Trace (D_1), (D_2), (T) et (C).

Partie B

Soit g la restriction de f à [-1 ; $+\infty$ [.

1. Démontre que g est une bijection de [-1 ; $+\infty$ [sur [0 ; $+\infty$ [.
2. Justifie que la bijection réciproque g^{-1} de g est dérivable en $\sqrt{2}$ etcalcule $(g^{-1})'(\sqrt{2})$.

Exercice 10

f est la fonction sur définie sur IR par : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1. Démontre que f est une bijection de IR sur un intervalle K que l'on précisera.
2. Justifie que la bijection réciproque f^{-1} de f est dérivable en 1 et calculer $(f^{-1})'(1)$.
3.
   a) Trace (C).
   b) Trace (C') la courbe représentative de f^{-1}.

Exercice 11

f est la fonction définie sur [0 ; 1] par : $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ +1.
On prendra pour unité graphique10 cm.
Etudier la dérivabilité de f en 0.

1. Interprète graphiquement le résultat.
2. Démontre que f est une bijection de [0 ;1] sur [0 ; 1]
3. Démontre que pour tout $x \in$ [0 ; 1],$f \circ f(x) = x$.
4. Déduis en la bijection réciproque de f.
5. Construis (C).

Exercice 12

f est la fonction de IR vers IR définie par : $f(x) = (2 - x)\sqrt{4 - x^2}$.
L'unité graphique est 2cm.

1. Etudie la dérivabilité de f en -2 et en 2 puis interprète graphiquement les résultats.
2. Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
3. Donne une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
4. Trace (T) et (C).

Exercice 13

f est la fonction de IR vers IR définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

1. Calcule la limite de f en +∞.
   Interprète graphiquement le résultat.
2. Calcule la limite de f en $-\infty$.
3.
   a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = -2x$ est asymptote à (C) en$-\infty$.
   b) Etudie la position de (C) par rapport à (D).
4. Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
5. Trace (D) et (C).

Exercice 14

f est la fonction définie sur $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ par :

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$$

Partie A

g est la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par : $g(x) = 2 - x^2\sqrt{x^2 - 1}$

1. Calcule la limite de g en +∞ .
2. Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
3.
   a) Démontre que l'équation $x \in]1; +\infty[, g(x) = 0$ admet une solution unique α et que 1< $\alpha < 2$.

b) Donne une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

4. Justifie que : $\begin{cases} \forall x \in]1\,;\alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha\,;+\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$

Partie B

1. Etudie la parité de f.
2.
   a) Calcule la limite de f en $+\infty$.
   b) Démontre que la droite (D) d'équation $y = -\frac{x}{2}+1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
   c) Etudie la position de (C) par rapport à (D) sur $]1;+\infty[$.
3. Etudie la dérivabilité de f en 1 puis interprète graphiquement le résultat.
4.
   a) Démontre que : $\forall\, x \in]1\,;+\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2\sqrt{x^2-1}}$
   b) Dresse le tableau de variation de f.
5. Démontre que : $f(\alpha) = -\frac{\alpha}{2} + \frac{2}{\alpha^3}$.

Niveau : TD

MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

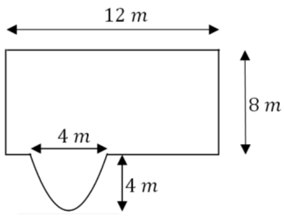
THEME : fonctions numériques

DUREE : 06 heures **CODE**

Leçon 4 : PRIMITIVES

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Le ministère a entrepris la construction d'une piscine dans l'enceinte d'un lycée d'excellence. L'entreprise chargée de l'ouvrage a affiché une image accompagnée d'un schéma de ce que sera cette piscine (voir image ci-contre).



Rimon élève de TA1 et amateur de natation, veut comparer la taille de la piscine de son lycée à celle du lycée professionnel de la ville. Il tente de calculer son aire mais n'y arrive pas. Il pose le problème à ses camarades de classe qui décident de l'aider à déterminer l'aire totale de la piscine en construction.

A. CONTENU DE LA LEÇON

I. Notion de primitive

1. Définition

f est une fonction définie sur un intervalle I. On appelle **primitive** de f sur I , toute fonction F dérivable sur I telle que f soit la dérivée de F.

Remarque

A partir de la définition, on peut écrire : **pour tout** $\mathbf{x \in I,\ \ F'(x) = f(x).}$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathrm{f(x) = 3x^2 + 1}$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F telle que : $\mathrm{F(x) = x^3 + x - 9}$,

En effet : F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{F'(x) = 3x^2 + 1 = f(x)}$.

EXERCICE DE FIXATION

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{f(x) = 2x + 5}$.

On donne les fonctions F, G, H dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction P dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et définies respectivement par :

$F(x) = x^2$; $G(x) = x^2 + 5x - 7$; $H(x) = x^2 + 5x$; $P(x) = x^2 + 5x + \frac{1}{x}$

Parmi les fonctions F , G , H et P , cite celles qui sont des primitives de f sur $\mathbb{R}$

Solution

On vérifie que : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = f(x)$ et $H'(x) = f(x)$.

Donc G et H sont des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

2 . Propriétés

Propriété1 : Condition d'existence d'une primitive

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.

EXERCICE DE FIXATION

Soient f, g, h et u les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par :

$$f(x) = x^3 - 1 \ ; \quad g(x) = \frac{1}{x} \ ; \quad h(x) = \sqrt{x} \ ; \quad u(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

Entoure celles qui admettent des primitives sur $\mathbb{R}$.

Solution

On entoure f et u , car ces deux fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$.

Propriété2 : Ensemble des primitives d'une fonction

Soit une fonction f continue, admettant une primitive F sur un intervalle I.

Toute primitive de f sur I est de la forme : $x \mapsto F(x) + c$, où c est un élément de $\mathbb{R}$.

Conséquence : toute fonction continue admet une infinité de primitives.

EXERCICES DE FIXATION

Exercice1

Soient f et F les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et définies par : $f(x) = x^2 - x$ et $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$

Vérifie que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, puis trouve deux autres primitives G et H de f sur $\mathbb{R}$.

Solution

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$. Donc, F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Toutes les primitives de f sont de la forme : $x \mapsto F(x) + c$, avec $c \in \mathbb{R}$

Deux autres primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions G et H définies respectivement par :

$G(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 29$ et $H(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 546$.

Exercice2

Détermine les primitives sur $]0;+\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Solution

Les primitives sur $]0;+\infty[$ de f sont les fonctions : $x \longmapsto \frac{1}{x} + c$, où $c \in \mathbb{R}$.

Propriété3 : La primitive d'une fonction vérifiant une condition initiale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, x_0 un élément de I et y_0 un nombre réel .

Il existe une primitive de f sur I et une seule qui prend la valeur y_0 en x_0 .

EXERCICE DE FIXATION

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x - 1$.

On suppose que la fonction G définie par $G(x) = x^2 - x$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$. Détermine la primitive H de g qui prend la valeur 5 en -1

Solution

La primitive cherchée H est de la forme $H(x) = G(x) + c = x^2 - x + c$, où $c \in \mathbb{R}$.

Cherchons c :

$H(-1) = 5 \iff (-1)^2 - (-1) + c = 5$. D'où : $c = 3$

Donc : $H(x) = x^2 - x + 3$.

II. Détermination d'une primitive

1. Primitives de fonctions usuelles

Fonction f	**Primitives de f** $(c \in \mathbb{R})$	**Sur l'intervalle**
$x \longmapsto a \ (a \in \mathbb{R})$	$x \longmapsto ax + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^r \ (r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\})$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$	$\mathbb{R}, \mathbb{R}_+,\ \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$x \longmapsto \frac{1}{x^r} \ (r \in \mathbb{Q} \setminus \{1\})$	$x \longmapsto \frac{-1}{(r-1)x^{r-1}} + c$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \longmapsto 2\sqrt{x} + c$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \longmapsto \cos x$	$x \longmapsto \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin x$	$x \longmapsto -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \longmapsto \tan x + c$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$
$x \longmapsto \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$	$x \longmapsto -\cot x + c$	$]k\pi; \pi + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$

EXERCICE DE FIXATION

Dans chacun des cas suivants, détermine toutes les primitives sur $]0;+\infty[$ de la fonction f

a. $f(x) = x^3$ b. $f(x) = \frac{1}{x^5}$ c. $f(x) = x^{2/3}$

Solution

a. $x \longmapsto \frac{1}{4}x^4 + c \ (c \in \mathbb{R})$ b. $x \longmapsto -\frac{1}{4x^4} + c \ (c \in \mathbb{R})$ c. $x \longmapsto -3x^{-\frac{1}{3}} + c \ (c \in \mathbb{R})$

2. Opérations et compositions

Propriété1

Soient u et v deux fonctions admettant respectivement pour primitives sur un intervalle I les fonctions U et V. k est un nombre réel.

- $U + V$ est une primitive sur I de la fonction $u + v$.
- kU est une primitive sur I de la fonction ku.

<u>EXERCICE DE FIXATION</u>

Dans chacun des cas suivants, détermine toutes les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

a. $f(x) = x + \sin x$ b. $f(x) = \sin x + \cos x$ c. $f(x) = 8x^2 + 5x - 9$

Solution

a. $x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 - \cos x + c \ (c \in \mathbb{R})$
b. $x \longmapsto -\cos x + \sin x + c \ (c \in \mathbb{R})$
c. $x \longmapsto \frac{8}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 9x + c \ (c \in \mathbb{R})$

Propriété2

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle contenant $u(I)$.

Une primitive sur I de la fonction $u' \times (v' o u)$ est la fonction $v \circ u$.

On en déduit le tableau suivant :

Fonction f	Une primitive F de f sur I	Conditions
$u'u^r \ (r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\})$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1}$	$u > 0$ sur I
$\frac{u'}{u^r} \ (r \in \mathbb{Q} \setminus \{1\})$	$\frac{-1}{(r-1)u^{r-1}}$	$u > 0$ sur I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$u'\cos u$	$\sin u$	
$x \longmapsto \cos(ax+b)$	$x \longmapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$a \neq 0$
$u'\sin u$	$-\cos u$	
$x \longmapsto \sin(ax+b)$	$x \longmapsto -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$a \neq 0$

EXERCICES DE FIXATION

Exercice1

Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive F sur $]0; +\infty[$ de la fonction f.

a. $f(x) = 3\sin 2x$ b. $f(x) = 2\sqrt{2x+1}$; c. $f(x) = \frac{3}{(3x+5)^2}$

Solution

a. $F(x) = 3 \times \left(-\frac{1}{2}cos2x\right) = -\frac{3}{2}cos2x$

b. $f(x) = 2(2x+1)^{\frac{1}{2}}$. Donc $F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}(2x+1)^{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}$.

c. $F(x) = -\frac{1}{(2-1)(3x+5)^{2-1}} = -\frac{1}{3x+5}$.

Exercice2

Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive H sur $\mathbb{R}$ de la fonction h.

a. $h(x) = (2x+1)(x^2+x+6)^3$ b. $h(x) = \frac{2x+3}{(x^2+3x+3)^4}$ c. $h(x) = \sin x \cos^5 x$

d. $h(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

Solution

a. $h(x) = u'(x) \times (u(x))^3$; avec $u(x) = x^2+x+6$, donc $H(x) = \frac{1}{4}(x^2+x+6)^4$

b. $h(x) = \frac{u'(x)}{(u(x))^4}$; avec $u(x) = x^2+3x+3$, donc $H(x) = -\frac{1}{3(x^2+3x+3)^3}$

c. $h(x) = -u'(x) \times (u(x))^5$; avec $u(x) = \cos(x)$, donc $H(x) = -\frac{1}{6}\cos^6 x$.

d. $h(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$; avec $u(x) = x^2+x+1$, donc $H(x) = 2\sqrt{x^2+x+1}$.

B. SITUATION COMPLEXE

Le car loué par le lycée pour sa colonie de vacances doit effectuer un trajet de 1500 km.
Lorsque ce car roule à la vitesse moyenne v, exprimée en km/h, la dérivée de sa consommation $C(v)$, exprimée en litres pour 100 km, selon les études d'un expert sur ce type de véhicule, est donnée par la relation : $C'(v) = \frac{-300}{v^2} + \frac{1}{3}$. Une information complémentaire fournie par le chauffeur au moment de la location du car est qu'il consomme 25 litres au 100 pour une vitesse moyenne de 60 km/h.
Le salaire horaire du chauffeur est de 900 F CFA et le litre de gasoil coûte 600 F CFA.
Les organisateurs de la colonie veulent déterminer la vitesse moyenne à laquelle le chauffeur doit rouler pour minimiser le coût total du voyage. Ils te sollicitent pour leur venir en aide.
Propose - leur une solution argumentée basée sur tes connaissances mathématiques.

Solution

- **Pour répondre à la préoccupation des organisateurs du voyage, nous utilisons les primitives.**
- **Nous allons déterminer le cout total du voyage**

Modélisation

- **Détermination de C**

De la relation $C'(v) = \frac{-300}{v^2} + \frac{1}{3}$, on obtient : $C(v) = \frac{300}{v} + \frac{v}{3} + k$. Le car consomme 25 litres au 100 pour une vitesse moyenne de 60 km/h, d'où : C(60) = 25. Or $C(60) = \frac{300}{60} + \frac{60}{3} + k$ = 25 + k, donc k est nul.

La formule donnant la consommation en litres pour 100 km est : $C(v) = \frac{300}{v} + \frac{v}{3}$.

- *Détermination du coût total du voyage.*

Ce coût total P(v) dépend de la vitesse v.

La durée du trajet de 1500 km à la vitesse v, est t = $\frac{1500}{v}$.

Le salaire du chauffeur sera donc $900 \times \frac{1500}{v} = \frac{1350000}{v}$.

La consommation en litres pour 1500 km (1500 = 15 × 100) sera de 15C(v) = 15($\frac{300}{v} + \frac{v}{3}$)

Comme le litre coûte 600FCFA, alors le coût du carburant sera de : 600× 15($\frac{300}{v} + \frac{v}{3}$)=9000($\frac{300}{v} + \frac{v}{3}$).

$P(v) = \frac{4050000}{v} + 3000v.$

- **Calcul de la vitesse qui minimise le coût total du voyage (résolution du modèle)**

Pour minimiser le coût total du trajet, il faut étudier les variations de la fonction P.
Etudier les variations de la fonction P revient à étudier le signe de sa dérivée.
P est dérivable sur l'intervalle]0; +∞ [.

$$P'(v) = \frac{-4050000}{v^2} + 3000$$

$$P'(v) = 0 \Leftrightarrow v = \sqrt{1350} \backsimeq 37,\ car\ v \geq 0$$

v	0		$\sqrt{1350}$		$+\infty$
$P'(v)$		-	0	+	
$P(v)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	

$$m = P(\sqrt{1350}) \backsimeq 220500$$

- **conclusion**

Pour minimiser le coût total du voyage, le chauffeur doit rouler à une vitesse moyenne de 37 km/h.
L'organisation de cette colonie leur coûterait alors 220 500 FCFA.

D . EXERCICES

1. **Exercices d'application**

Exercice1

Réponds par VRAI (V) ou par Faux (F) à chacune des affirmations suivantes

N°	AFFIRMATIONS	REPONSES
1.	Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction définie par : $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ est la fonction définie par : $F(x) = x^3 - 2x^2 + x - \pi$	
2.	La primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction définie par $p(x) = x - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ qui prend la valeur $-\frac{1}{2}$ en 1 est la fonction définie par $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} - 2\sqrt{x} + 1$	
3.	Une primitive sur un intervalle I de la fonction $u'v + uv'$ est la fonction $u \times v$	

Solution

1. V 2. F 3. V

Exercice2

Dans chacun des cas suivants, détermine les primitives sur I de la fonction f.

1. $f(x) = \frac{1}{(2x+5)^2}$; $I = \left]-\frac{5}{2};+\infty\right[$
2. $f(x) = (3x+2)(3x^2+4x+7)^3$; $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \frac{4x^3}{\sqrt{x^4+1}}$; $I = \mathbb{R}_+$

solution

1. $\forall x \in \left]-\frac{5}{2};+\infty\right[, f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{(2x+5)^2}$.
   Donc, les primitives sur $\left]-\frac{5}{2};+\infty\right[$ de f sont de la forme : $x \longmapsto -\frac{1}{2(2x+5)} + c$ $(c \in \mathbb{R})$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}(6x+4)(3x^2+4x+7)^3$.
   Donc, les primitives sur $\mathbb{R}$ de f sont de la forme : $x \longmapsto \frac{1}{8}(3x^2+4x+7)^4 + c$ $(c \in \mathbb{R})$.
3. Les primitives sur $\mathbb{R}_+$ de f sont de la forme : $x \longmapsto 2\sqrt{x^4+1} + c$ $(c \in \mathbb{R})$.

Exercice3

On donne les fonctions fet F définies sur $]0;+\infty[$ respectivement, par :

$f(x) = x\left(5\sqrt{x} + 4\right)$ et $F(x) = 2x^2\left(\sqrt{x} + 1\right)$

Démontre que F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

Exercice4

Dans chacun des cas suivants détermine les primitives sur I de la fonction f.

1. $f(x) = \frac{2x^6-3x+8}{2x^4}$, $I =]0;+\infty[$
2. $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-9}}$; $I =]3;+\infty[$
3. $f(x) = (x-1)(x^2-2x+5)^3$; $I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{5}\right)$, $I = \mathbb{R}$

2. Exercices de renforcement

Exercice5

On considère les fonctions f et F définies sur $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$ respectivement par :

$f(x) = x\sqrt{3-2x}$ et $F(x) = (ax^2+bx+c)\sqrt{3-2x}$, où a, b et c sont des nombres réels.

Détermine a, b et c pour que F soit une primitive de f sur $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$.

Réponse

On a : $\forall x \in \left]-\infty;\frac{3}{2}\right[, F'(x) = f(x)$.

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow (2ax+b)\sqrt{3-2x} - \frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{3-2x}} = x\sqrt{3-2x}$$

$$\Leftrightarrow -5ax^2 + (6a-3b)x + 3b - c = -2x^2 + 3x.$$

Par identification : $\begin{cases} -5a = -2 \\ 6a - 3b = 3 \\ 3b - c = 0 \end{cases}$

On obtient : $a = \frac{2}{5}$, $b = -\frac{1}{5}$ et $c = -\frac{3}{5}$.

Exercice6

On donne les fonctions f et h définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par :

$f(x) = \frac{-x^3+2x^2+2}{x^2+1}$ et $h(x) = \frac{x^4+3x^2-4x}{(x^2+1)^2}$

1. Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = -f'(x) - \frac{4x}{(x^2+1)^2}$.
2. Détermine la primitive H de h sur $\mathbb{R}$, qui prend la valeur 2 en 0.

Réponse

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{-x^4-3x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^4-3x^2+4x-4x}{(x^2+1)^2} = -\frac{x^4+3x^2-4x}{(x^2+1)^2} - \frac{4x}{(x^2+1)^2} = -h(x) - \frac{4x}{(x^2+1)^2}$.

   Donc : $h(x) = -f'(x) - \frac{4x}{(x^2+1)^2}$.
2. On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = -f'(x) - 2 \times \frac{2x}{(x^2+1)^2}$.

   La primitive cherchée H est de la forme: $H(x) = -f(x) + \frac{2}{x^2+1} + c$, où $c \in \mathbb{R}$.

   $H(0) = -f(0) + 2 + c = 2$. Alors : $c = f(0) = 2$.

   Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $H(x) = -f(x) + \frac{2}{x^2+1} + 2$.

Exercice7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = x\cos x$.

1. Calcule la dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$, par : $g(x) = x\sin x$.
2. Déduis-en une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice8

Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

1. $f(x) = \frac{x\sin x+\cos x}{x^2}$ 2. $f(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}$

Exercice9

Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive F sur I de la fonction f.

1. $f(x) = \frac{-3x+1}{(3x^2-2x-1)^4}$; $I =]1;+\infty[$
2. $f(x) = \sin 7x \cos^3 7x$; $I = \mathbb{R}$

3. $f(x) = (3-2x)\sin(x^2-3x+1)$; $I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{5}\right)$, $I = \mathbb{R}$
5. $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$, $I = \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$.
6. $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$, $I =]1; +\infty[$.

Exercice10

Soit la fonction f définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, par : $f(x) = \frac{1}{1-\sin x}$.

1. Vérifie que : $\frac{1}{1-\sin x} = \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}$.
2. Déduis-en les primitives de f sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice11

Sans linéariser l'expression $\cos^3 x \sin^3 x$, détermine une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f: x \longmapsto \cos^3 x \sin^3 x$.

3. **Exercices d'approfondissement**

Exercice12

1. Linéariser l'expression $\cos^4 x$.
2. Déduis-en les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \longmapsto \cos^4 x$.

Réponse

1. $\cos^4 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)$

   $$\cos^4 x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)$$

   $\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.$
2. Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \longmapsto \cos^4 x$ sont les fonctions :
   $x \longmapsto \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c \quad (c \in \mathbb{R})$.

Exercice13

Soit f la fonction définie sur $]2; +\infty[$, par : $f(x) = \frac{x^3-x^2-8x+8}{(x-2)^2}$.

1. Détermine trois nombres réels a, b et c tels que : $\forall x \in]2; +\infty[$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$.
2. Déduis-en les primitives de f sur $]2; +\infty[$.

Réponse

1. A l'aide d'une division euclidienne , on obtient : $a = 1$, $b = 3$ et $c = -4$.
2. $\forall x \in]2; +\infty[$, $f(x) = x + 3 - \frac{4}{(x-2)^2}$
   Les primitives de f sur $]2; +\infty[$ sont de la forme : $x \longmapsto \frac{1}{3}x^2 + 3x + \frac{4}{x-2} + c \quad (c \in \mathbb{R})$.

Exercice14

On considère la fonction f définie sur $\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$, par : $f(x)=\sin^3 x-\frac{2}{(3x-1)^2}$.

Détermine les primitives de f sur $\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$.

Exercice15

On considère les fonctions h et g définies sur ℝ, par : $h(x)=\cos^2 x$ et $g(x)=\sin^2 x$.

1. Calcule $h(x)+g(x)$.
   Déduis-en la primitive S de $h+g$ sur ℝ, qui s'annule en 0.
2. Détermine $h(x)-g(x)$.
   Déduis-en la primitive D de $h-g$ sur ℝ, qui s'annule en 0.
3. On désigne par H et G des primitives respectives de h et g sur ℝ.
   Déduis des questions précédentes H et G.

Exercice16

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$, par : $h(x)=\frac{x}{(2x+1)^3}$.

1. Détermine les nombres réels a et b tels que : $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $h(x)=\frac{a}{(2x+1)^2}+\frac{b}{(2x+1)^3}$.
2. Déduis-en une primitive H de h sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

Terminale D
Mathématiques

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

THEME : FONCTIONS NUMERIQUES

Durée : 14 heures   Code :

LEÇON 05: FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Le médico-scolaire de ta commune organise une campagne de dépistage de la fièvre typhoïde dans ton établissement. Après avoir examiné n élèves pris au hasard, le médecin-chef affirme que la probabilité d'avoir au moins un élève non atteint de la fièvre typhoïde dans cet établissement est de $1-(0{,}325)^{n}$.
Afin de sensibiliser davantage les élèves contre cette maladie, le chef de l'établissement veut connaitre le nombre minimum d'élèves tel que la proportion d'avoir au moins un élève non atteint de la fièvre typhoïde soit supérieur à 98%. Il sollicite ta classe.
Après plusieurs essais infructueux avec la calculatrice, la classe décide de s'informer sur la résolution de ce type d'inéquation auprès de son professeur de mathématique.
.

B. CONTENU DE LA LEÇON

I- La fonction logarithme népérien

1. Définition

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $]0\,;+\infty[$ et qui s'annule en 1.

2. Conséquences

- **$\ln 1 = 0$**
- L'ensemble de définition de la fonction ln est $]0\,;+\infty[$.
- La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x > 0$, **$\ln'(x) = \frac{1}{x}$**.
- Pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x} > 0$, donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

3. Propriétés algébriques

Propriété fondamentale :
Pour tous réels a et b strictement positifs,
$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$

Conséquences : Pour tous réels a et b strictement positifs :
- $\ln \frac{1}{b} = -\ln(b)$
- $\ln \frac{a}{b} = \ln(a) - \ln(b)$
- pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $\ln(a^r) = r\ln(a)$, en particulier, $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

Exercice de fixation

Ecris sous la forme ln a, où a > 0, chacune des expressions suivantes :

A = ln 8 + ln 10 + ln $\frac{1}{40}$; B = ln 3x – ln 3 , x >0 ; C = ln$\frac{3}{4}$ + ln $\frac{8}{3}$ – ln 2^3
D = ln (7^{-3}) + 2 ln 49 E = 4 ln 25 – 2 ln $\sqrt{5}$

Solution

$$A = \ln 8 + \ln 10 + \ln \frac{1}{40} = \ln\left(8 \times 10 \times \frac{1}{40}\right) = \ln 2$$

$$B = \ln 3x - \ln 3 = \ln\left(\frac{3x}{3}\right) = \ln x$$

$$C = \ln\frac{3}{4} + \ln \frac{8}{3} - \ln(2^3) = \ln 2 - \ln(2^3) = \ln\left(\frac{2}{2^3}\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right).$$

$$D = \ln (7^{-3}) + 2 \ln 49 = \ln (7^{-3}) + \ln (49^2) = \ln(7^{-3} \times 7^4) = \ln 7$$

$$E = 4 \ln 25 - 2 \ln \sqrt{5} = 8\ln 5 - \ln 5 = \ln 5^7.$$

4. Equations, inéquations

Propriété : Pour tous réels a et b strictement positifs,

- ln a > ln b équivaut à $a > b$
- ln a = ln b équivaut à $a = b$

Conséquences : Pour tout réel x strictement positif :

- ln x = 0 équivaut à $x = 1$
- ln x < 0 équivaut à $0 < x < 1$
- ln $x \geq 0$ équivaut à $x \geq 1$

Le nombre réel e

La fonction ln est continue et strictement croissante sur]2 ; 3[.
ln 2 ≈ 0,69 et ln 3 ≈ 1,09 ; comme 1 ∈] ln2 ; ln3[, il existe un unique réel noté e ∈]2 ; 3[tel que ln(e)=1. On a : e ≈ 2,718.
Remarque :
Pour tout nombre rationnel r, ln (e^r) = r.

Résolution d'équations et d'inéquations

a) Equations du type ln u(x) = m

Exemple de resolution

- Résous dans ℝ, l'équation : ln(x) = 3

solution
ln(x) = 3 équivaut à $x \in]0; +\infty[$ et x = e^3.

$$S_{\mathbb{R}} = \{e^3\}$$

- Résous dans ℝ, l'équation : ln(2x – 1) = -5

Solution
ln(2x – 1) = -5 équivaut à $x \in]\frac{1}{2}; +\infty[$ et 2x – 1 = e^{-5}. On obtient : $x = \frac{e^{-5}+1}{2}$.

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{e^{-5}+1}{2}\right\}.$$

b) Inéquations du type ln u(x) < m

Résous dans ℝ, l'inéquation : ln(x + 1) ≤ 2

Solution

$\ln(x + 1) \leq 2$ équivaut à $x \in]-1; +\infty[$ et $\ln(x + 1) \leq \ln(e^2)$

équivaut à $0 < x + 1 \leq e^2$.

Donc $-1 < x \leq e^2 - 1$.

$S_{\mathbb{R}} =]-1 ; e^2 - 1[$.

c) Equations du type a $(\ln x)^2 + b \ln x + c = 0$

Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation : $(\ln x)^2 - 3 \ln x - 4 = 0$.

Solution

L'ensemble de validité est $]0 ; +\infty[$.

On pose $X = \ln x$ et on obtient l'équation : $X^2 - 3X - 4 = 0$

$\Delta = 25$. Les solutions sont alors : $X_1 = -1$ et $X_2 = 4$.

On résout alors les équations :

$\ln x = -1$ et on obtient : $x = e^{-1}$

$\ln x = 4$ et on obtient : $x = e^4$.

$$S_{\mathbb{R}} = \{e^{-1} ; e4\}$$

- <u>Méthode :</u> Pour résoudre une équation du type $\ln u(x) = \ln v(x)$ (respectivement une inéquation du type $\ln u(x) \geq \ln v(x)$) :

- on détermine l'ensemble de validité c'est à dire l'ensemble des réels x tels que $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$ (dans ce cas l'équation est bien définie);

- on résout dans cet ensemble l'équation $u(x) = v(x)$ (respectivement l'inéquation $u(x) \geq v(x)$).

- <u>Exemple</u> : Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\ln(x^2 - 4) = \ln(3x)$.

-

.

L'équation sera alors résolue dans l'ensemble $E =]2 ; +\infty[$.

- de plus $x^2 - 4 = 3x$ signifie $x^2 - 3x - 4 = 0$.

On trouve $\Delta = 25$ et les solutions sont $x_1 = -1$ et $x_2 = 4$. Or $4 \in E$ et $-1 \notin E$,

donc la seule solution de l'équation $\ln(x^2 - 4) = \ln(3x)$ est 4.

- Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\ln(2x + 4) \geq \ln(6 - 2x)$.
- On cherche les réels x tels que $2x + 4 > 0$ et $6 - 2x > 0$, c'est à dire tels que $x > -2$ et $x < 3$.

L'inéquation doit alors être résolue dans l'ensemble : $E =]-2 ; 3[$.

De plus, $2x + 4 \geq 6 - 2x$ équivaut à $x \geq \frac{1}{2}$. L'ensemble des solutions est alors : $E \cap [\frac{1}{2}; +\infty[$, c'est à dire $[\frac{1}{2} ; 3[$.

<u>Exercices de fixation</u>

<u>Exercice1</u>

Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\ln(2x - 4) = 0$

Solution

On cherche les nombres x tels que $2x - 4 > 0$

Or $2x - 4 > 0$, lorsque $x \in]2 ; +\infty[$.

L'équation sera alors résolue dans l'ensemble $V =]2 ; +\infty[$.

$\ln(2x - 4) = 0$ équivaut à $2x - 4 = 1$, c'est à dire $x = \frac{5}{2}$. Or $= \frac{5}{2} \in E$.

donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

Exercice2

Résous dans$\mathbb{R}$, l'inéquation : $\ln(x - 10) < 0$

Solution

L'équation sera alors résolue dans l'ensemble E $=]10\ ; +\infty[$.

De plus : $x - 10 < 1$. D'où : $x < 11$.

L'ensemble des solutions est : $S_{\mathbb{R}} = E \cap]-\infty\ ; 11[$ c'est-à-dire $]10;11[$.

5. Etude de la fonction ln

a- limite en +∞ et en 0

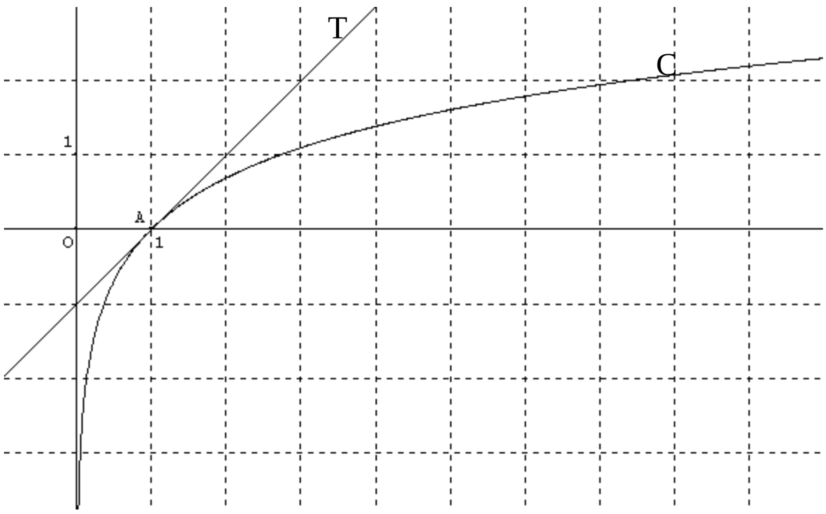
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$

Conséquence : L'axe des ordonnées est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction ln.

b- Variation de la fonction ln

la fonction ln est dérivable et strictement croissante sur $]0\ ; +\infty[$. On a :

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$\frac{1}{x}$	$+$
$\ln(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$



(T) est la tangente à la courbe représentative (C) de la fonction ln au point A d'abscisse 1.

Une équation de (T) est : $y = x - 1$

La courbe est au-dessous de T sur $]0\ ; +\infty[$, donc pour tout $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$.

- **limite en +∞ de $\frac{lnx}{x}$**

Propriété : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$

Démonstration : f est la fonction définie sur $]0\ ; +\infty[$ par $f(x) = \ln x - 2\sqrt{x}$.

f est dérivable sur $]0\ ; +\infty[$, et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$

Sur $]0\ ; +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \sqrt{x}$.

Le tableau de variation permet d'affirmer que, pour tout $x > 0$, $f(x) < 0$, c'est à dire $\ln x < 2\sqrt{x}$,

d'où $\frac{lnx}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	-2	$\searrow$ 0

Or pour tout $x \geq 1$, $0 \leq \frac{lnx}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$.

- Autres limites

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\, lnx = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{lnx}{x-1} = 1$

Exercices de fixation

Exercice 1

Calcule la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto 2x - 3 - lnx$

Solution

$$\lim_{x\to+\infty} (2x - 3 - lnx) = \lim_{x\to+\infty} x(2 - \frac{3}{x} - \frac{lnx}{x})$$

Or $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (2 - \frac{3}{x} - \frac{lnx}{x}) = 2 \end{cases}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x - 3 - lnx) = +\infty$

Exercice 2

Calcule :

a. la limite en 0 de x$\mapsto x^3 \ln x$

b. la limite en $+\infty$ de x$\mapsto x\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$

Solution

a. $\lim\limits_{x\to 0} x^3 \ln x = \lim\limits_{x\to 0} x^2 \times x \ln x = 0$

Car: $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x = 0$

. b. On a : $x\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = 2 \times \frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}}$

Par composé $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} 2\frac{\ln(1+x)}{x} = 2$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = 2$

4. Etude de Fonction du type ln *u*

1. Dérivées de ln *u* et ln$|u|$

Propriétés

- Si *u* est une fonction dérivable et **strictement positive sur un intervalle I**, alors la fonction ln *u* est dérivable sur I et on a : (ln *u*)' = $\frac{u'}{u}$.

- Si u est une fonction dérivable et **ne s'annulant pas sur un intervalle I**,

alors la fonction ln $|u|$ est dérivable sur I et : (ln $|u|$)' = $\frac{u'}{u}$.

Exercice de fixation

Dans chacun des cas suivants, précise l'ensemble de dérivabilité, puis détermine la dérivée de la fonction f :

a. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ b. $f(x)=ln|2x - 1|$

Solution

a. Le polynôme u définie par $u(x) = x^2 + 1$ est strictement positif et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x $\in \mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

b. On a : $2x - 1 \neq 0$ pour $x \neq \frac{1}{2}$.

La fonction f est dérivable sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$.

2. Primitive de $\frac{u'}{u}$

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, **ne s'annulant pas sur I**, alors, une primitive sur I de la fonction $\frac{u'}{u}$ est la fonction ln $|u|$.

Remarque

- $\ln|u| = \ln u$ si $u > 0$ sur I ;
- $\ln|u| = \ln(-u)$ si $u > 0$ sur I

Exercice de fixation

Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive F de la fonction f sur l'intervalle K

a. $f(x) = \frac{1}{x}$, $K =]-\infty; 0[$

b. $f(x) = \frac{4x^3}{x^4+2}$, $K = \mathbb{R}$

Solution

a. Une primitive sur]-∞ ; 0[de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est donc la fonction $x \mapsto \ln|x|$.

Or : pour tout $x \in]-\infty; 0[$, $x < 0$. $F(x) = ln|x| = ln(-x)$.

b. La fonction $f : x \mapsto \frac{4x^3}{x^4+2}$ se présente sous la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^4 + 2$.

Or : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^4 + 2 > 0$. Donc $F(x) = \ln|x^4 + 2| = \ln(x^4 + 2)$.

II. La fonction logarithme de base a

Définition :

On appelle fonction logarithme de base a (a >0 et a ≠ 1) , notée log_a , la fonction définie sur]0 ; +∞[par : $log_a(x) = \frac{\ln(x)}{lna}$.

Remarque :

- La fonction logarithme décimal, notée log, est la fonction définie sur]0 ; +∞[par :
$$\log x = \frac{lnx}{ln10}.$$
- Pour tout entier relatif n, log (10^n) = n.
- $log_a(a) = 1$.
- log(1) = 0, log(10) = 1.

C. SITUATION COMPLEXE

A la fin de chaque mois, une nouvelle entreprise de fabrication de boissons gazeuses fait le bilan de ses recettes du mois écoulé.
Un expert en finances et ami du chef de l'entreprise, ayant obtenu des chiffres sur l'évolution financière de cette entreprise, fait une modélisation des recettes par la fonction r telle que :
pour tout $x \geq 1$, $r(x) = 3x - x\ln\frac{1}{2}x$,
où x designe le nombre de mois d'existence de l'entreprise et $r(x)$ est exprimée en millions de francs CFA.
Le chef, pour surmonter d'éventuelles difficultés que pourrait connaître son entreprise, voudrait savoir le mois à partir duquel une baisse des recettes sera enregistrée, en vue d'accroître le capital d'investissement.
Il te sollicite.
Réponds à la préoccupation du chef de l'entreprise.

Solution

- Pour répondre à sa préoccupation je vais utiliser la fonction logarithme népérien.
- Après avoir déterminé le sens de variation de la fonction je vais répondre à sa préoccupation.

Etudions le sens de variation de la fonction r sur $[1; +\infty[$ et dressons son tableau de variation.

- $r(1) = 3 + ln2$
- Pour tout$x \in [1; +\infty[$, $r'(x) = 2 - \ln\frac{1}{2}x$.

$r'(x) > 0 \iff x < 2e^2$

On en déduit que : $\begin{cases} \forall x \in [1; 2e^2[, & r'(x) > 0 \\ \forall x \in]2e^2; +\infty[, & r'(x) < 0 \end{cases}$

<u>Sens de variation de r</u>

r est strictement croissante sur $[1; 2e^2[$
r est strictement décroissante sur $]2e^2; +\infty[$.
<u>Tableau de variation</u>

x	1		$2e^2$		$+\infty$
r '(x)		+	|	-	
r(x)	$r(1) = 3 + ln2$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

On a : $14 < 2e^2 < 15$.
L'entreprise va enregistrer une baisse de ses recettes mois à partir de son 15ème mois d'existence.

D. EXERCICES

1. Exercices d'application

Exercice 1

Calcule les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(7x)$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{lnx}$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln(x))$

d. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(4 - 3x)$

e. $\lim\limits_{x\to0} \ln(x\sqrt{2})$.

f. $\lim\limits_{x\to-\infty} ln\left(-\frac{x}{3}\right)$

g. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(0,8x)}{x}$

Solution

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(7x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$;

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{lnx} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{lnx}{x}} = +\infty$;

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(1 - \frac{ln(x)}{x}) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) = 1 \end{cases}$;

d. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(4 - 3x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$;

e. $\lim\limits_{x\to0} \ln(x\sqrt{2}) = \lim\limits_{X\to0} \ln(X) = 0$

f. $\lim\limits_{x\to-\infty} ln\left(-\frac{x}{3}\right) = \lim\limits_{X\to+\infty} ln(X) = +\infty$

g. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(0,8x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 0,8 \times \frac{\ln(0,8x)}{0,8x} = \lim\limits_{X\to+\infty} 0,8 \times \frac{\ln(X)}{X} = 0,8.$

.

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive de la fonction f sur l'intervalle K

a. $f(x) = \frac{1}{1-3x}$, $K = \left]-\infty; \frac{1}{3}\right[$

b. $f(x) = 2x - 7 + \frac{4}{x-9}$, $K =]9; +\infty[$

Solution

a. f admet pour primitive la fonction F avec $F(x) = \ln|1 - 2x|$.

b. f admet pour primitive la fonction F avec F(x)=$x^2 - 7x + 4ln|x - 9|$.

Exercice 3:

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1+lnx}{1-lnx}$.

Justifie que la fonction f admet le tableau de variation ci-dessous :

x	0		e		$+\infty$
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	-1

Solution

f est une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

pour tout x $\in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times(1-lnx)+\frac{1}{x}\times(1+lnx)}{(1-lnx)^2} = \frac{2}{x(1-lnx)^2}$. On a donc : pour tout x $\in$ $]0; +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0; e[$ et sur $]e; +\infty[$ d'où le tableau de variation.

2. Exercice de renforcement

Exercice 4

a. Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation : $ln(2x-3) = 2ln(6-x) - lnx$
b. Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation: $\ln 24 + \ln(3-x) < \ln(x+1) + \ln(25x-49)$

Solution

a. $ln(2x-3) = 2ln(6-x) - lnx$

On cherche les réels x tels que $2x - 3 > 0$, et $6 - x > 0$ et $x > 0$, c'est à dire tels que : $x > \frac{3}{2}$, $x < 6$ et $x > 0$.
L'équation doit alors être résolue dans l'ensemble : $E = \left]\frac{3}{2}; 6\right[$
On a : $2x - 3 = \frac{(6-x)^2}{x}$
On obtient : $x = 3$ ou $x = -12$.
$3 \in E$, mais $-12 \notin E$. Donc l'unique solution de l'équation est 3.

b. $\ln 24 + \ln(3-x) < \ln(x+1) + \ln(25x-49)$

On cherche les réels x tels que $3 - x > 0$, et $x + 1 > 0$ et $25x - 49 > 0$, c'est à dire tels que : $x < 3$, $x > -1$ et $x > \frac{49}{25}$.
L'inéquation doit alors être résolue dans l'ensemble : $E = \left]\frac{49}{25}; 3\right[$

On a : $24(3-x) < (x+1)(25x-49)$

$25x^2 - 121 > 0$
Alors : $x \in \left]-\infty; -\frac{11}{5}\right[\cup \left]\frac{11}{5}; +\infty\right[$
On en déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S_{\mathbb{R}} = \left]\frac{49}{25}; 3\right[\cap \left(\left]-\infty; -\frac{11}{5}\right[\cup \left]\frac{11}{5}; +\infty\right[\right)$$
$$S_{\mathbb{R}} = \left]\frac{11}{5}; 3\right[.$$

3. Exercice d'approfondissement

Exercice 5
1. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x - 2 - 2x \ln x$.
   a. Détermine son sens de variation.
   b. Déduis-en le signe de $f(x)$.
2. Soit g la fonction définie sur $]0 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{lnx}{(x-2)^2}$.
   On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).
   a. Calcule les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
      Interprète graphiquement les résultats obtenus.
   b. Démontre que : pour tout x de $]0 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$, $g'(x) = \frac{f(x)}{x(x-2)^3}$.
   c. Détermine le sens de variation de g et dresse son tableau de variation.
   d. Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.
   e. Construis (C) et (T) dans le repère (O,I, J) (unité 2 cm).

Solution

1. a. Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $f^{'}(x) = -1 - 2lnx$

$f'(x) > 0 \iff x < e^{-\frac{1}{2}}$.

On en déduit que :

$$\begin{cases} \forall x \in \left]0; e^{-\frac{1}{2}}\right[, & f'(x) > 0 \\ \forall x \in \left]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty\right[, & f'(x) < 0 \end{cases}$$

<u>Sens de variation de f</u>

- f est strictement croissante sur $\left]0; e^{-\frac{1}{2}}\right[$
- f est strictement décroissante sur $\left]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty\right[$

a. <u>Signe de $f(x)$</u>

Utilisons le tableau de variation de f.

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ 0	↗	$\frac{2}{\sqrt{e}} - 2$	↘	$-\infty$

$\forall x \in]0; +\infty[$, $f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}} - 2 < 0$

2. a. Limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{lnx}{(x-2)^2} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{lnx}{(x-2)^2} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{lnx}{(x-2)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x + \infty} \frac{lnx}{(x-2)^2} = \lim_{x + \infty} \frac{lnx}{x} \times \frac{1}{x - 4 + \frac{4}{x}} = 0 \times 0 = 0$$

<u>Interprétation graphique des résultats</u>

- Les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$ sont des asymptotes verticales à (C).
- La droite d'équations $y = 0$ est une asymptote horizontale à (C) en $+\infty$.

b. $\forall x \in]0\,;\,2[\cup]2\,;\,+\infty[$,

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-2)^2 - 2(x-2)lnx}{(x-2)^4} = \frac{\frac{1}{x}(x-2)^2 - 2(x-2)lnx}{(x-2)^4} = \frac{(x-2)^2 - 2x(x-2)lnx}{x(x-2)^4} = \frac{x - 2 - 2xlnx}{x(x-2)^3} = \frac{f(x)}{x(x-2)^3}$$

c. Détermine le sens de variation de g.

$\forall x \in]0\,;\,2[\cup]2\,;\,+\infty[$, $x > 0$. Donc, le signe de $g(x)$ est celui de $\frac{f(x)}{(x-2)^3}$

- $\forall x \in]0\,;\,2[$, $(x-2)^3 < 0$ et $f(x) < 0$, donc $g'(x) > 0$

- $\forall x \in]2;+\infty[$, $(x-2)^3 > 0$ et $f(x) < 0$, donc $g'(x) < 0$

Donc : g est strictement croissante sur $]0\,;\ 2[$

g est strictement décroissante sur $]2;+\infty[$

Tableau de variation de g

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	
$g(x)$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$ $+\infty$	$\searrow$	0

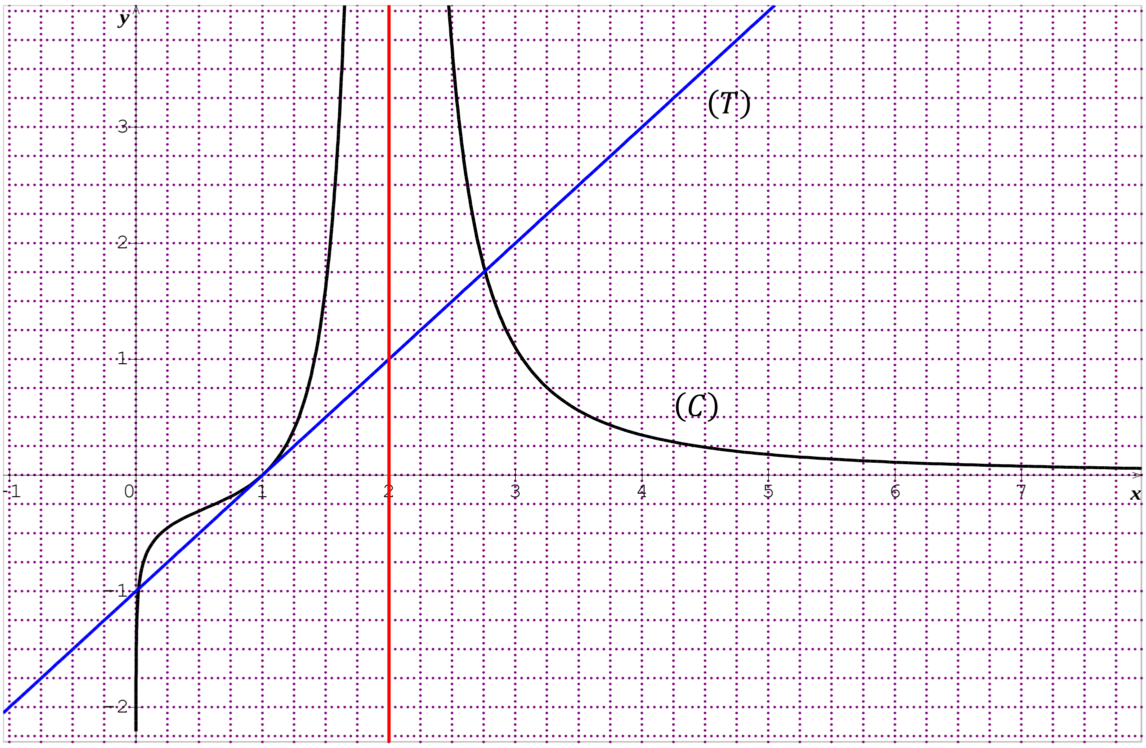
d. Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

Une équation de (T) est : $y = g'(1)(x-1) + g(1)$

$g(1) = 0$ et $g'(1) = 1$

Donc, une équation de (T) est : $y = x - 1$.

e. Construction de (C) et (T) dans le repère (O,I, J) (unité 2 cm).



SECONDAIRE
T^le^D
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

THEME : CALCULS ALGEBRIQUES

DUREE : 16 heures **CODE :**

Leçon 6 : NOMBRES COMPLEXES

A - SITUATION D'APPRENTISSAGE

Des élèves d'une classe de terminale s'interroge sur ce qu'ils viennent de découvrir à l'exposition sur les journées mathématiques organisée par la Société Mathématique de Côte d'Ivoire (SMCI). Dans un stand sur les équations on peut lire :
Au début du XVIème siècle, le mathématicien Scipione dal Ferro, propose une formule donnant une solution de l'équation du 3ème degré $x^3 + px = q$

$$x = \sqrt[3]{\frac{q-\sqrt{q^2+4p^3/27}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q+\sqrt{q^2+4p^3/27}}{2}}$$

A la fin du XVIème siècle, le mathématicien Bombelli applique cette formule à l'équation $x^3 - 15x = 4$.
Il obtient littéralement : $x = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$.
Les élèves sont intrigués par la notation $\sqrt{-1}$ car depuis la classe de troisième ils savent que la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas. Leur professeur de mathématique explique qu'en mathématique, lorsqu'une équation n'a pas de solutions dans un ensemble, une démarche naturelle (et historique) consiste à en chercher dans un ensemble plus grand. L'ensemble numérique le plus grand que l'on a rencontré est $\mathbb{R}$. Pourtant, l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$. Il a fallu envisager un autre ensemble dans lequel l'équation ci-dessus admet des solutions.
Les élèves décident d'en savoir d'avantage sur ce nouvel ensemble.

B - RESUME DE COURS

I. ETUDE ALGEBRIQUE

1. Notion de nombre complexe

a- Définition

on appelle nombre complexe tout nombre de la forme $a + ib$ où $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Propriété et définition

Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique sous la forme $z = a + ib$;

La forme $a + ib$ est appelée forme algébrique du nombre complexe.

Le nombre réel a est appelé la partie réelle du complexe, on note : $a = \mathcal{R}e(z)$.

Le nombre réel b est appelé la partie imaginaire du complexe, on note : $b = \mathcal{I}m(z)$.

Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est un nombre complexe imaginaire pur. L'ensemble des nombres complexes imaginaires purs est l'ensemble noté $i\mathbb{R}$.

Un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle est un nombre réel.

On a: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Le seul nombre complexe à la fois réel et imaginaire pur est le nombre nul 0.

Les calculs se font dans $\mathbb{C}$ $\boldsymbol{comme\ dans}$ $\mathbb{R}$ en tenant compte du fait que $\boldsymbol{i^2 = -1}$.

Exemples :

- $z = 3 - 2i$ est un nombre complexe de partie réelle 3 et de partie imaginaire -2.
- $z = 5i$ est un nombre complexe de partie réelle 0 et de partie imaginaire 5 , $z = 5i$ est un complexe imaginaire pur.

b- **Opérations dans $\mathbb{C}$**

Soient $z = a + ib\ \ et\ z' = a' + ib'$ deux nombres complexes donnés.

- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$;
- $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.
- Pour tout nombre complexe non nul, $(a; b) \neq (0; 0)$ et $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$.
- Soient $z\ et\ z'$ deux nombres complexes tels que $z \neq 0$; $\frac{z'}{z} = z' \times \frac{1}{z}$.

Exercice de fixation

Donne la forme algébrique de chaque nombre complexe z :

1) $z = (2 + 4i) + (-5 + i)$; 2) $z = (2 - i)(3 + 2i)$; 3) $z = \frac{2}{1-3i}$.

Solution

1) $z = (2 + 4i) + (-5 + i) = (2 - 5) + (4 + 1)i = -3 + 5i$.

2) $z = (2 - i)(3 + 2i) = \big(2 \times 3 - (-1 \times 2)\big) + \big(2 \times 2 + 3 \times (-1)\big)i = 8 + i$.

3) $z = \frac{2}{1-3i} = 2 \times \frac{1}{1-3i} = 2\left(\frac{1}{1^2+(-3)^2} - i\frac{(-3)}{1^2+(-3)^2}\right) = 2\left(\frac{1}{10} + i\frac{3}{10}\right) = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$.

c) Propriété

Soit z et z' deux nombres complexes.

$z = z' \Leftrightarrow \mathcal{Re}(z) = \mathcal{Re}(z')$ et $\mathcal{Im}(z) = \mathcal{Im}(z')$.

$z = 0 \Leftrightarrow \mathcal{Re}(z) = 0$ et $\mathcal{Im}(z) = 0$.

Exercice de fixation
Soit $z = a + 2 + i(b + 5)$ et $z' = -1 + 3i$ deux nombres complexes.
Détermine les réels a et b pour que z et z' soient égaux.

$z = z' \Leftrightarrow \mathcal{Re}(z) = \mathcal{Re}(z')$ et $\mathcal{Im}(z) = \mathcal{Im}(z')$
on a donc $\begin{cases} a + 2 = -1 \\ b + 5 = 3 \end{cases}$, soit $\begin{cases} a = -3 \\ b = -2 \end{cases}$
$z\ et\ z'$ sont égaux lorsque $a = -3$ et $b = -2$.

Remarque :

Pour tout nombre entier naturel n, on a : $i^{4n} = 1$; $i^{4n+1} = i$; $i^{4n+2} = -1$; $i^{4n+3} = -i$

Exercice de fixation 1

Calcule i^{2019} et $i^{1000000000}$

Solution

$i^{2019} = i^{4\times 504+3} = -i$; $i^{1000000000} = i^{4\times 250000000} = 1$

Exercice de fixation 2
Détermine la forme algébrique du nombre complexe : $(1 - 2i)^5$

Solution
$(1-2i)^5 = \sum_{k=0}^{5} C_5^k 1^{5-k}(-2i)^k$

$$(1-2i)^5 = C_5^0 1^5(-2i)^0 + C_5^1 1^4(-2i) + C_5^2 1^3(-2i)^2 + C_5^3 1^2(-2i)^3 + C_5^4 1(-2i)^2 + C_5^5 1^0(-2i)^5$$

$$(1-2i)^5 = 1^5(-2i)^0 + 5\times 1^4(-2i) + 10\times 1^3(-2i)^2 + 10\times 1^2(-2i)^3 + 5\times 1(-2i)^4 + 1\times 1^0(-2i)^5$$

$(1-2i)^5 = 1 - 10i - 40 + 80i + 80 - 32i = 41 + 38i$.

2. <u>Conjugué d'un nombre complexe</u>

Définition

Soit un nombre complexe z tel que $z = a + ib$ où $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$. Le nombre complexe conjugué de z est le nombre complexe noté $\overline{z}$ tel que $\overline{z} = a - ib$.

<u>Exemples :</u>

1)$z=1$; $\overline{z}=1$; 2) $z=i$; $\overline{z}=-i$; 3) $z=1+3i$; $\overline{z}=1-3i$;
4) $z=2i-3$; $\overline{z}=-3-2i$.

Propriété 1

Soit $(z;z')\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}, n\in\mathbb{N}$

(i). $\overline{\overline{z}}=z$.

(ii). $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}; z+\overline{z}=2\mathcal{R}e(z)\ ; z-\overline{z}=2i\mathcal{I}m(z)$.

(iii). $\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}\ ;\overline{z^n}=\overline{z}^n$

(iv). pour $z\neq 0$, $\overline{(\frac{1}{z})}=\frac{1}{\overline{z}}$; $\overline{(\frac{z\prime}{z})}=\frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$.

(v). Pour $z=a+ib\ , z\times\overline{z}=a^2+b^2$

Exercice de fixation 1
1)Soit $z=\ 1-3i$ un nombre complexe
Calcule : $z\times\bar{z}$, $z+\bar{z}$ et $z-\bar{z}$.
2) Détermine le conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

$z=i\left(\sqrt{2}\ -\ 3i\right)$ et $z'=\ (4\ +\ 3i)\ +\ (-5i-1)$.

Solution
1)
$z\times\bar{z}=(\mathcal{R}e(z))^2+(\mathcal{I}m(z))^2=1^2+(-3)^2=10$.

$z+\bar{z}=2\mathcal{R}e(z)=2\times 1=2$.

$z-\bar{z}=2i\mathcal{I}m(z)=2i(-3)=-6i$.

2)

$\overline{z}=\overline{i\left(\sqrt{2}\ -\ 3i\right)}=\overline{i}\overline{(\sqrt{2}\ -\ 3i)}=-i\left(\sqrt{2}+3i\right)=3-i\sqrt{2}$.
$\overline{z'}=\overline{4+3i}+\overline{-5i-1}=4-3i+5i-1=3+2i$.
<u>*Conséquences :*</u>

Pour tout $(\boldsymbol{z};\boldsymbol{z'})\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}$; $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{z}}=\frac{\overline{\boldsymbol{z}}}{\boldsymbol{z}\times\overline{\boldsymbol{z}}}=\frac{\overline{\boldsymbol{z}}}{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}$; $\frac{\boldsymbol{z\prime}}{\boldsymbol{z}}=\frac{\boldsymbol{z\prime}\times\overline{\boldsymbol{z}}}{\boldsymbol{z}\times\overline{\boldsymbol{z}}}=\frac{\boldsymbol{z\prime}\times\overline{\boldsymbol{z}}}{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}$

Propriété 2

Soit $z\in\mathbb{C}^*$;

(i)- $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\mathcal{I}m(z)=0\Leftrightarrow\overline{z}=z$

(ii)- $z\in i.\mathbb{R}\Leftrightarrow\mathcal{R}e(z)$=0$\Leftrightarrow\overline{z}=-z$

Exercice de fixation

Soit le nombre complexe $z = \frac{2-3i}{x+i}$; $x \in \mathbb{R}$. Détermine le nombre réel x tel que z soit :

1) Un nombre réel ;

2) Un nombre imaginaire pur.

Solution

Comme $x \in \mathbb{R}$ alors le nombre complexe z est bien défini.

$z = \frac{2-3i}{x+i} = \frac{(2-3i)(x-i)}{x^2+1^2} = \frac{2x-3}{x^2+1} - i\,\frac{3x+2}{x^2+1}$.

1) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{I}m(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x+2}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$. z est donc réel lorsque $x = -\frac{2}{3}$.

2) z est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $\mathcal{R}e(z)$=0 $\Leftrightarrow \frac{2x-3}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$. z est donc imaginaire pur lorsque $x = \frac{3}{2}$.

3. Module d'un nombre complexe

Définition

Le module du nombre complexe $z = a + ib$ est le nombre réel positif noté $|z|$ tel que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$|z| = \sqrt{z \times \bar{z}}$.

Exemple

$|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

$|i| = 1$.

Propriétés

Soit $(z; z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$:

(i). Si $z = a, a \in IR\ alors\ |z| = |a|$.

(ii). Si $z = ib\ , b \in IR\ \ alors\ |z| = |b|$.

(iii). $|\overline{z}| = |-z| = |z|;\ |z \times z'| = |z|.|z'|;\ |z^n| = |z|^n$.

(iv). Pour $z \neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$; $\left|\frac{z\prime}{z}\right| = \frac{|z\prime|}{|z|}$.

(v). $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).

(vi). $|z|^2 = z \times \overline{z} = (\mathcal{Re}(z))^2 + (\mathcal{Im}(z))^2$

Exercice de fixation

Détermine le module du nombre complexe z chacun des cas suivants :

1) $z = (3 - i)(3i - 2)$; 2) $z = (2 + i) + (8 - i)$; 3) $z = \frac{3-i}{4-i\sqrt{2}}$; 4) $z = (3 + i)^3$.

Solution

1) $|z| = |(3 - i)(3i - 2)| = |3 - i| \times |3i - 2| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} \times \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{130}$.

2) $|z| = |(2 + i) + (8 - i)| = |(2 + 8) + i(1 - 1)| = |\ 10\ | = 10$.

3) $|z| = \left|\frac{3-i}{4-i\sqrt{2}}\right| = \frac{|3-i|}{|4-i\sqrt{2}|} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

4) $|z| = |(3 + i)^3| = |3 + i|^3 = (\sqrt{10}\,)^3 = 10\sqrt{10}$

II- <u>Représentation géométrique d'un nombre complexe</u>

Dans la suite de ce chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$; on l'appelle aussi plan complexe.

- A tout nombre complexe $z = x + iy$ on associe le point $M(x; y)$ du plan. Réciproquement à tout point $A(a; b)$ du plan on associe le nombre complexe $z_0 = a + ib$.

On établit ainsi une bijection entre $\mathbb{C}$ et $\mathcal{P}$ (plan).

Le nombre complexe $z = x + iy$ est appelé affixe du point M. On note z_M.

Le point $M(x; y)$ est le point image du nombre complexe $z = x + iy$. On note M(z) .

- On associe également à chaque vecteur $\vec{w}(a; b)$ du plan le nombre complexe $z = a + ib$ appelé affixe du vecteur $\vec{w}$. On note $z_{\vec{w}} = a + bi$.
  Le vecteur $\vec{w}(a; b)$ est le vecteur image du nombre complexe $a + ib$.
  - $(O, \vec{u})$ est appelé l'axe réel ;
  - $(O, \vec{v})$ est l'axe imaginaire.

Soit $\vec{w}$, $\overrightarrow{w'}$ deux vecteurs du plan, M et M' deux points du plan et $k \in \mathbb{R}$.

$z_{\vec{w}+\vec{w'}} = z_{\vec{w}} + z_{\vec{w'}}$; $z_{\overrightarrow{MM'}} = z_{M'} - z_M$ et $z_{k.\vec{w}} = k \times z_{\vec{w}}$.

Exemple

Soit $A(2 + i)$ et $B(-4 + 7i)$ deux points du plan complexe.

On a : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -4 + 7i - 2 - i = -6 + 6i$ et
$z_{3.\overrightarrow{AB}} = 3 \times z_{\overrightarrow{AB}} = 3(-6 + 6i) = -18 + 18i$.

Interprétation géométrique du module d'un nombre complexe.

z est un nombre complexe de point image M. Le point M et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ ont le même affixe

$\|\overrightarrow{OM}\| = OM = |z|$, on en déduit que le module d'un nombre complexe z d'image M est la distance entre les points $O \ \ et\ M$.

$|z_{\overrightarrow{MM'}}| = |z_{M'} - z_M| = MM'$.

III. FORME TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL.

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$.

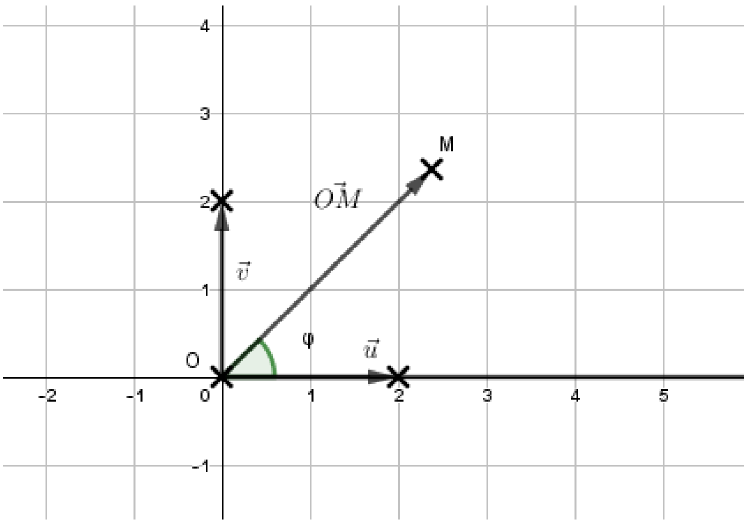
1. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

a. Argument d'un nombre complexe non nul

Définition

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$, soit $z \in \mathbb{C}^*$ d'image M.

Un argument du nombre complexe z est une mesure en radian de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}; \overrightarrow{OM}})$.



Si φ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}; \overrightarrow{OM}})$ alors $\arg(z) = \varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Si $z = a + ib, (a; b) \neq (0; 0)\ et\ \varphi = \arg(z)$ alors on a : $\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{a}{a^2+b^2} \\ \sin(\varphi) = \frac{b}{a^2+b^2} \end{cases}$.

Si $a \neq 0\ alors\ \tan(\varphi) = \frac{b}{a}$.

Remarque

Tout nombre complexe non nul z admet un unique argument appartenant à l'intervalle $]-\pi;\ \pi]$ appelé argument principal et noté $Arg(z)$.

Exemples

(i). Pour $z = a\ , a \in \mathbb{R}^*; \arg(z) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(ii). Pour $z = ib, b \in \mathbb{R}^*; \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Exercice de fixation :

Détermine un argument du nombre complexe z dans chacun des cas suivants:

1) $z = \sqrt{3} + i$; 2) $z = 1 - i\sqrt{3}$; 3) $z = 1 + i$.

1) $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$. Soit φ un argument de z .

$\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\varphi) = \frac{1}{2} \end{cases}$, on en déduit qu'un argument de z est $\frac{\pi}{6}$ et tout argument de z est de la forme : $\arg(z) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\ , k \in \mathbb{Z}$.

2) $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$. Soit φ un argument de z .

$\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{1}{2} \\ \sin(\varphi) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$, on en déduit qu'un argument de z est $-\frac{\pi}{3}$ et tout argument de z est de la forme : $\arg(z) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\ , k \in \mathbb{Z}$.

3) $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Soit φ un argument de z .

$\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$, on en déduit qu'un argument de z est $\frac{\pi}{4}$ et tout argument de z est de la forme : $\arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi\ , k \in \mathbb{Z}$.

Propriétés

Soient $(z; z') \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*, n \in \mathbb{N}$:

- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg(\overline{z}) = -\arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

- $\arg(z^n) = n.arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Exercice de fixation

Détermine un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$z = \left(-\sqrt{3} + i\right)(1 - i)$; 2) $z = \frac{1-\mathrm{i}}{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}$; 3) $z = (1 - i)^3(-\sqrt{3} + i)^2$.

Solution

Posons $\boldsymbol{z_1 = -\sqrt{3} + i}$ et $\boldsymbol{z_2 = 1 - i}$.

$|z_1| = \sqrt{(-\sqrt{\mathbf{3}})^2 + \mathbf{1}^2} = \sqrt{\mathbf{4}} = \mathbf{2}$ **;** Soit φ un argument de z_1, $\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\varphi) = \frac{1}{2} \end{cases}$

on en déduit qu'un argument de z est $\frac{5\pi}{6}$ et tout argument de z est de la forme : $\varphi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$|\boldsymbol{z_2}| = \sqrt{\mathbf{1}^2 + (-\mathbf{1})^2} = \sqrt{\mathbf{2}}$ **;** Soit θ un argument de $\boldsymbol{z_2}$, $\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

on en déduit qu'un argument de z est $-\frac{\pi}{4}$ et tout argument de z est de la forme : $\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in z$.

1) $z = \boldsymbol{z_1 \times z_2}$ **, donc**

$\boldsymbol{arg}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{arg}(\boldsymbol{z_1}) + \boldsymbol{arg}(\boldsymbol{z_2}) + \mathbf{2}\boldsymbol{k}\pi = \frac{5\pi}{6} + \frac{-\pi}{4} + 2k\pi = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) $z = \frac{z_2}{z_1}$, donc

$$\boldsymbol{arg}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{arg}(\boldsymbol{z_2}) - \boldsymbol{arg}(\boldsymbol{z_1}) + \mathbf{2}\boldsymbol{k}\pi = -\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{6} + 2k\pi = -\frac{13\pi}{12} + 2k\pi$$
$$= \frac{11\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

3) $z = \boldsymbol{z_1}^{\mathbf{2}} \times \boldsymbol{z_2}^{\mathbf{3}}$**, donc**

$$\boldsymbol{arg}(\boldsymbol{z}) = \mathbf{2}\boldsymbol{arg}(\boldsymbol{z_1}) + \mathbf{3}\boldsymbol{arg}(\boldsymbol{z_2}) + \mathbf{2}\boldsymbol{k}\pi = 2 \times \frac{5\pi}{6} + 3 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Remarque

Si z est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{w}$ alors arg (z) est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}})$

Si z_A et z_B sont les affixes des points A et B alors arg $(z_B - z_A)$ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}})$

b. <u>Forme trigonométrique d’un nombre complexe non nul</u>

Définition

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul ; $r = |z|$ et θ un argument de z.

z s’écrit de façon unique sous la forme :

$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.

Cette écriture est appelée la forme trigonométrique du nombre complexe z.

Exemples

$2 + 2i = 2\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + isin(\frac{\pi}{4}))$; $4i = 4(\cos(\frac{\pi}{2}) + isin(\frac{\pi}{2}))$; $5 = 5(\cos(0) + isin(0))$.

Exercice de fixation :

Détermine la forme trigonométrique du nombre complexe $\boldsymbol{z = -\sqrt{3} + i}$.

Solution

$|\boldsymbol{z}| = \sqrt{(-\sqrt{\mathbf{3}})^{\mathbf{2}} + \mathbf{1}^{\mathbf{2}}} = \sqrt{\mathbf{4}} = \mathbf{2}$ **;** Soit φ un argument de z, $\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\varphi) = \frac{1}{2} \end{cases}$

on en déduit qu’un argument de z est $\frac{5\pi}{6}$ et la forme trigonométrique de z est :
$z = 2(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6}))$.

Passage d’une forme à l’autre :

Forme algébrique
$z = a + bi$

$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ cos\alpha = \frac{a}{r} \\ sin\alpha = \frac{b}{r} \end{cases}$

Forme trigonométrique
$z = r(cos\alpha + isin\alpha)$

$\begin{cases} a = rcos\alpha \\ b = rsin\alpha \end{cases}$

c. Forme exponentielle d’un nombre complexe non nul.

On pose $\boldsymbol{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)}$.

Définition

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument $\boldsymbol{\theta}$ **.**

On appelle forme exponentielle de z l'écriture $z = re^{i\boldsymbol{\theta}}$.

Exemples

$2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$; $4i = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$; $5 = 5e^{i0}$.

Exercice de fixation

Détermine la forme exponentielle de chacun des nombres complexes z suivants.

1) $z = 1 + i$; 2) $z = 1 + i\sqrt{3}$.

Solution

1) $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Soit φ un argument de z .

$\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$, on en déduit qu'un argument de z est: $\frac{\pi}{4}$. L'écriture exponentielle de z est:

$z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2) 3) $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. Soit φ un argument de z .

$\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{1}{2} \\ \sin(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$, on en déduit qu'un argument de z est: $\frac{\pi}{3}$. L'écriture exponentielle de z est:

$z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Remarques :

- Pour déterminer la forme trigonométrique d'un nombre complexe on calcule d'abord le module de z puis un argument de z.
- La forme trigonométrique d'un complexe est bien indiquée pour déterminer les produits, les quotients ou les puissances d'un nombre complexe.

Propriété

Soient $z = r\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i\theta}}$ et $z' = r'\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i\varphi}}$ deux nombres complexes non nuls.

(i) $z' = z \Leftrightarrow \begin{cases} r' = r \\ \varphi = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

(ii) $\overline{z} = r\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i\theta}}$; $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{z}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i\theta}}$**.**

(iii) $z' \times z = rr'e^{i(\theta+\varphi)}$.

(iv) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, , $z^n = r^n\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{in\theta}}$.

(v) $\frac{z'}{z} = \frac{r'}{r} \boldsymbol{e^{i(\varphi-\theta)}}$

Exercice de fixation

Détermine la forme exponentielle de $z = \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$.

Solution

$z = \frac{z_1}{z_2}$ avec $z_1 = 1 + i \;\; et \;\; z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.

$z_1 = \sqrt{2} \times e^{i\frac{\pi}{4}} \;\; et \; z_2 = 2 \times e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2} \times e^{i\frac{\pi}{4}}}{2 \times e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times e^{-i\frac{\pi}{12}}$.

Remarque

$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) + 2k\pi$.

2. <u>Formule de MOIVRE et applications</u>

<u>a- Formule de Moivre</u>

Propriété

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ ***et*** pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

On a :$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

On appelle cette propriété la **formule de Moivre.**

Exercice de fixation

Soit $\boldsymbol{z} = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^{300}$.

En utilisant la formule de Moivre justifie que : $z = 1$.

Solution

$z = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^{300} = (\cos(\frac{\pi}{3}) + isin(\frac{\pi}{3}))^{300} = \cos(\frac{300\pi}{3}) + isin(\frac{300\pi}{3})$

$z = \cos(100\pi) + isin(100\pi) = 1$.

b. <u>Formules d'EULER</u>

Propriété

Soit $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{et\; n} \in \mathbb{Z}$;

$\cos(\boldsymbol{\theta}) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\boldsymbol{\theta}) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

En général : $\cos(n\boldsymbol{\theta}) = \frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}$ et $\sin(n\boldsymbol{\theta}) = \frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i}$.

Remarque

Les formules d'Euler permettent de linéariser des expressions du type $cos^n(x) ou\ sin^n(x)$.

Exercice de fixation

Soit α un nombre réel et n un nombre entier relatif.

Exprime $cos^4(\alpha)$ en fonction cos $n\alpha$ et sin $n\alpha$.

Solution

$$cos^4(\alpha) = (\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2})^4$$

$$cos^4(\alpha) = \frac{1}{16}(C_4^0(e^{i\alpha})^4\left(e^{-i\alpha}\right)^0 + C_4^1(e^{i\alpha})^3\left(e^{-i\alpha}\right) + C_4^2(e^{i\alpha})^2\left(e^{-i\alpha}\right)^2 + \quad C_4^3(e^{i\alpha})^1(e^{-i\alpha})^3 + C_4^4(e^{i\alpha})^0(e^{-i\alpha})^4$$

$$cos^4(\alpha) = \frac{1}{16}(e^{i4\alpha} + 4e^{i3\alpha}e^{-i\alpha} + 6e^{i2\alpha}e^{-i2\alpha} + 4e^{i\alpha}e^{-i3\alpha} + e^{-i4\alpha})$$

$$cos^4(\alpha) = \frac{1}{16}(e^{i4\alpha} + 4e^{i2\alpha} + 6 + 4e^{-i2\alpha} + e^{-i4\alpha})$$

$$cos^4(\alpha) = \frac{1}{16}(e^{i4\alpha} + e^{-i4\alpha} + 4(e^{i2\alpha} + e^{-i2\alpha}) + 6)$$

$$cos^4(\alpha) = \frac{1}{16}(2\cos(4\alpha) + 8\cos(2\alpha) + 6)$$

$$cos^4(\alpha) = \frac{1}{8}\cos(4\alpha) + \frac{1}{2}\cos(2\alpha) + \frac{3}{8}.$$

III- EQUATIONS DANS $\mathbb{C}$

1.Résolutions d'équations dans $\mathbb{C}$

1°) Racines carrées d'un nombre complexe.

a- Définition

Soit un nombre complexe z_0, on appelle racine carrée du complexe, z_0 tout nombre complexe z tel que : $z^2 = z_0$.

Méthode

Soit $z = x + iy$; $z^2 = z_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |z_0| \quad (1) \\ x^2 - y^2 = \mathcal{R}e(z_0) \ \ (2) \\ 2xy = \mathcal{I}m(z_0) \ \ (3) \end{cases}$

b- Remarques :

- Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées.
- Si $z_0 \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{avec}$ $z_0 > 0$ alors les racines carrées de z_0 sont : $-\sqrt{z_0}$ et $\sqrt{z_0}$.
- Si $z_0 \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{avec}$ $z_0 < 0$ alors les racines carrées de Z_0 sont $-i\sqrt{-z_0}$ et $i\sqrt{-z_0}$.

Exercice de fixation.

Détermine les racines carrées de chacun des nombres complexes suivants :

1)$Z_0 = 8 - 6i$.

2) $z_0 = -5$

Solution

1)

$|Z_0| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10.$

Soit $z = x + iy$ une racine carrée de z_0. On a : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \ \ (1) \\ x^2 - y^2 = 8 \ \ (2) \\ 2xy = -6 \ \ (3) \end{cases}$

. (1) + (2) entraine $2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 3$

En remplaçant x par 3 dans (3) on a $y = -1$.

Donc les racines carrées de $Z_0 = 8 - 6i$ sont $3 - i$ et $-3 + i$.

2) $(i\sqrt{5})^2 = -5i$, donc les racines carrés de $z_0 = -5$ sont $-i\sqrt{5}$ et $i\sqrt{5}$.

2. Equations du second degré.

Propriété

Soit a, b et c sont des nombres complexes avec $a \neq 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si δ est une racine carrée de Δ, alors les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ sont :

$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$.

Exercice de fixation

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

1) (E_1): $z^2 + 5z - 14 = 0$.

2) (E_2): $z^2 - 2iz - 1 = 0$.

3) (E_3): $z^2 + 2iz + 3 = 0$.

4) (E_4): $z^2 - (1+i)z + 2 - i = 0$.

Solution

1)

(E_1): $z^2 + 5z - 14 = 0$.

$\Delta = 81$. On obtient $S = \{-7 : -2\}$.

2)

(E_2): $z^2 - 2iz - 1 = 0$.

$\Delta = 0$. On obtient $S = \{i\}$.

3)

(E_3): $z^2 + 2iz + 3 = 0$.

$\Delta = -16 = 16i^2 = (4i)^2$. Une racines carrée de -16 est $4i$.

On obtient $S = \{-3i; i\}$.

4)

(E_4): $z^2 - (1+i)z + 2 - i = 0$.

$\Delta = -8 + 6i$. Soit $\delta = x + iy$ une racine carrée de Δ.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 & (1) \\ x^2 + y^2 = 10 & (2) \\ 2xy = 6 & (3) \end{cases}$$

$(1) + (2) \Longrightarrow x = 1$ ou $x = -1$.

En remplaçant x par 1 dans (3) on a $\delta = 1 + 3i$.

$$z_1 = \frac{-(-1-i)-(1+3i)}{2\times1} = \frac{1+i-1-3i}{2} = \frac{-2i}{2} = -i.$$

$$z_2 = \frac{-(-1-i)+(1+3i)}{2\times1} = \frac{1+i+1+3i}{2} = \frac{2+4i}{2} = 1 + 2i.$$

On obtient $S = \{-i; 1+2i\}$.

Remarques :

- Si a, b et c des $réels$ $avec$ $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ a deux solutions complexes conjuguées.
- Pour résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$**, on a pas besoin de déterminer les deux racines carrées de** Δ**.**

3°) Racine n-ième d'un nombre complexe.

a. Racine n-ième d'un nombre complexe.

Définition

Soit un nombre complexe $Z_0 \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$ $\boldsymbol{avec}$ $\boldsymbol{n \geq 2}$ **. On appelle** racine n-ième de Z_0 tout nombre complexe z tel que $z^n = Z_0$.

Propriété 1

Soit $Z_0 = Re^{i\theta}$; les racines n-ième de Z_0 sont $z_k = \sqrt[n]{R} \times e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ $avec$ $k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$.

Propriété 2

Les racines n-ième d'un nombre complexe sont les affixes des sommets d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans un cercle de rayon $\sqrt[n]{R}$.

Exercice de fixation

Soit : $Z = 8(1 + i\sqrt{3})$.

Détermine les racines 4-ième de Z.

Solution

On a: $Z = 16\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)$.

Soit $z = \rho(cosx + isinx)$, $\rho > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors $z^4 = \rho^4(cos4x + isin4x)$.

$z^4 = Z \iff \begin{cases} \rho^4 = 16 \\ 4x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ D'où: $\begin{cases} \rho = 2 \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \{0; 1; 2; 3\} \end{cases}$

- Pour $k = 0$, $x = \frac{\pi}{12}$, $z_0 = 2\left(cos\frac{\pi}{12} + isin\frac{\pi}{12}\right)$

- Pour $k = 1$, $x = \frac{7\pi}{12}$, $z_1 = 2\left(cos\frac{7\pi}{12} + isin\frac{7\pi}{12}\right)$
- Pour $k = 2$, $x = \frac{13\pi}{12}$, $z_2 = 2\left(cos\frac{13\pi}{12} + isin\frac{13\pi}{12}\right)$
- Pour $k = 3$, $x = \frac{19\pi}{12}$, $z_3 = 2\left(cos\frac{19\pi}{12} + isin\frac{19\pi}{12}\right)$.

Les racines 4-ième de Z sont z_0 ; z_1 ; z_2 et z_3.

b. Racine n-ième de l'unité.

Définition :

Une racine n-ième de l'unité est une solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^n = 1$.

Les racines n-ième de l'unité sont :

$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \cos(\frac{2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{2k\pi}{n})\ avec\ k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$.

Exercice de fixation :

Détermine les racines n-ième de l'unité dans chacun des cas suivants.

1) $n = 2$; 2) $n = 3$; 3) $n = 4$; 4) $n = 5$.

Solution

- ✓ Pour n=2 ; $z^2 = 1$.

  Les solutions : $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{2}}, k \in \{0; 1\}$; soit $z_0 = 1\ et\ z_1 = -1$.

- ✓ Pour n=3 ; $z^3 = 1$.

  Les solutions : $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}, k \in \{0; 1; 3\}$

  $z_0 = 1;\ z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ et\ z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

  On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, on a : $j^2 = \overline{j}\ \ et\ j^2 + j + 1 = 0$.

- ✓ Pour n=4 ; $z^4 = 1$.

  Les solutions : $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{4}}, k \in \{0; 1; 2; 3\}$; soit
  $z_0 = 1;\ z_1 = i;\ z_2 = -1\ ;\ z_3 = -i$.

- ✓ Pour n=5 ; $z^5 = 1$.

  Les solutions : $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{5}}\ , k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Remarques :

- Les images des racines n-ième de l'unité sont les sommets d'un n-polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.
- Si $z_k \neq 1$ est une racine n-ième de l'unité alors $\overline{z_k} = z_{n-k}$.
- Si $z_0 \neq 1$ est une racine n-ième de l'unité alors les racines n-ième de l'unité sont : $z_k = {z_0}^k$ $avec$ $k \in \{0; 1; ...; n-1\}$.
- Si $z_k, k \in \{0; 1; ...; n-1\}$ sont les racines n-ième de l'unité alors.$\sum_{k=0}^{n} z_k = 0$.

Si z_0 est une racine n-ième de Z_0 alors les racines n-ième de Z_0 sont $z_k = z_0 \times e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ $avec$ $k \in \{0; 1; ...; n-1\}$.

C- SITUATION COMPLEXE

Des élèves d'une classe de terminale scientifique découvrent en préparant un exposé sur les ensembles de nombres dans la bibliothèque de leur Lycée, la propriété suivante :

« On dit qu'un entier naturel A est la somme de deux carrés, s'il existe deux entiers naturels x et y $tels$ que $A = x^2 + y^2$. Si A est la somme de deux carrés, alors A^n est aussi la somme de deux carrés pour pour tout entier $n \geq 1$ » .

Un élève ne faisant pas partie du groupe chargé de l'exposé ne comprend pas cette information. Il sollicite ses camarades pour l'aider.

Ils informent leur professeur de mathématique, qui leur dit d'utiliser leur connaissance sur les nombres pour vérifier cette information.

Demontre cette proprieté pour ton ami.

Solution

- Pour confirmer cette information, je vais utiliser les nombres complexes.
- J'utilise un nombre complexe bien choisi.
- Le carré du module de ce nombre complexe est le nombre que je choisis.
- Développement :
- Soit $A = x^2 + y^2$. Posons $z = x + iy$ $avec$ $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$.

  On a:$A = |z|^2$.

  Soit $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$.

  - En utilisant un raisonnement par récurrence, je justifie que pour tout $n \geq 1, z^n = x_n + iy_n$ $avec$ $x_n \in \mathbb{Z}$ et $y_n \in \mathbb{Z}$.
    $z^1 = z = x + iy$ $avec$ $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$. La propriété est vraie au rang 1.
    Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$;
    Supposons que $z^n = x_n + iy_n$ $avec$ $x_n \in \mathbb{Z}$ et $y_n \in \mathbb{Z}$ (R);

Démontrons que $z^{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1}$ $avec$ $x_{n+1} \in \mathbb{Z}$ et $y_{n+1} \in \mathbb{Z}$
$z^{n+1} = z \times z^n = (x + iy)(x_n + iy_n)$ d'après (R).
$z^{n+1} = (xx_n - yy_n) + i(yx_n + xy_n)$

$z^{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1}$ $avec$ $x_{n+1} = (xx_n - yy_n) \in \mathbb{Z}$ et $y_{n+1} = (yx_n + xy_n) \in \mathbb{Z}$.

La propriété est vraie au rang n+1.
Conclusion : pour tout $n \geq 1, z^n = x_n + iy_n$ $avec$ $x_n \in \mathbb{Z}$ et $y_n \in \mathbb{Z}$.
Si $z = x + iy$ $avec$ $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$ alors

- Soit $A = x^2 + y^2$.
  On a:$A = |z|^2$.
  Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.
  $A^n = (|z|^2)^n = (|z^n|)^2 = {x_n}^2 + {y_n}^2$.

➢ Conclusion : si A est la somme de deux carrés, alors A^n est aussi la somme de deux carrés.

D- EXERCICES

1. EXERCICES DE FIXATION

Exercice 1

Ecris sous forme algébrique les nombres complexes suivants :$z = (1 + i)(\sqrt{3} + i)$ et $z' = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$

Solution

$$z = (1 + i)(\sqrt{3} + i) = \sqrt{3} + i + i\sqrt{3} + i^2 = \sqrt{3} - 1 + i(1 + \sqrt{3})$$

$$z' = \frac{1 + i}{\sqrt{3} + i} = \frac{(1 + i)(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)} = \frac{(\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1)}{4} = \frac{(\sqrt{3} + 1)}{4} + i\frac{(\sqrt{3} - 1)}{4}$$

Exercice 2

Ecris chacun des nombres complexes $1 + i$ et $\sqrt{3} + i$ sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle :

Solution

- $|1 + i| = \sqrt{2}$
  Soit $\propto = \arg(1 + i)$
  On a :$\begin{cases} cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

Donc $1 + i = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

- $\left|\sqrt{3}+i\right| = 2$
  Soit $\theta = \arg(1+i)$
  On a : $\begin{cases} cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

Donc $\sqrt{3}+i = 2\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

2. EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice3

On donne : $Z = (1+i)(\sqrt{3}+i)$

1. Ecris le nombre complexe Z sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.
2. Déduis-en les valeurs exactes de $cos\frac{5\pi}{12}$ et $sin\frac{5\pi}{12}$.

Exercice4

Résous dans $\mathbb{C}$l'équation suivante

$$(-2+i)z^2 + (4-5i)z + 3 - i = 0$$

3. EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 5

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Unité graphique : $2cm$

1) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $8-6i$

2) On considère le polynôme P défini par $P(z) = z^3 + (-1+i)z^2 + (2+2i)z + 8i$

a) Démontrer que $P(z)$ admet une unique racine imaginaire pure αi qu'on déterminera

b) Déterminer les complexes $a; b$ et c tels que $P(z) = (z-\alpha i)(az^2 + bz + c)$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

3) On considère les points $A; B$ et C d'affixes respectives $-1-i; 2-2i$ et $2i$

a) Placer les points $A; B$ et C

b) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier votre réponse

c) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme

4) On considère le point E d'affixe $2+2i$

a) Placer le point E

b) Démontrer que les points $A; B; C$ et E sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon

Solution

1) Déterminons les racines carrées de $8-6i$

Posons : $Z = 8-6i$. $|Z| = 10$
Soit : $z = x+iy \quad (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$

$$z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 10 \\ x^2-y^2 = 8 \\ 2xy = -6 \end{cases}$$

$$2x^2 = 18$$

$x^2 = 9$, d'où $x = 3$ ou $x = -3$.

Pour $x = 3$, $2 \times 3y = -6$. D'où $y = -1$

Pour $x = -3$, $2 \times (-3)y = -6$. D'où $y = 1$

Donc, les racines carrées de $8-6i$ sont : $3-i$ et $-3+i$.

2) $P(z) = z^3 + (-1+i)z^2 + (2+2i)z + 8i$

a) Démontrons que $P(z)$ admet une unique racine imaginaire pure αi

αiest une racine imaginaire pure de $P(z)$signifie que :

$$(\alpha i)^3 + (-1+i) \times (\alpha i)^2 + (2+2i) \times \alpha i + 8i = 0$$

$$-i \propto^3 + \alpha^2 - i\alpha^2 + 2i\alpha - 2\alpha + 8i = 0$$

$$\alpha^2 - 2\alpha + i(-\propto^3 - \alpha^2 + 2\alpha + 8) = 0$$

On obtient le système : $\begin{cases} \alpha^2 - 2\alpha = 0 \\ -\propto^3 - \alpha^2 + 2\alpha + 8 = 0 \end{cases}$

$$\alpha^2 - 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = 2$$

On a : $-0^3 - 0^2 + 2 \times 0 + 8 = 8$, $8 \neq 0$

$$-2^3 - 2^2 + 2 \times 2 + 8 = -8 - 4 + 4 + 8 = -12 + 12 = 0$$

Donc, la racine imaginaire pure de $P(z)$ est $2i$.

b) Déterminer les complexes $a; b$ et c tels que $P(z) = (z - \alpha i)(az^2 + bz + c)$

On a : $P(z) = (z - 2i)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - 2iaz^2 - 2ibz - 2ic$

$$= az^3 + (b - 2ia)z^2 + (c - 2ib)z - 2ic$$

Par identification : $\begin{cases} a = 1 \\ b - 2ia = -1 + i \\ c - 2ib = 2 + 2i \\ -2ic = 8i \end{cases}$

On en déduit que : $a = 1$, $b = -1 + 3i$, $c = -4$

D'où : $P(z) = (z - 2i)[z^2 + (-1 + 3i)z - 4]$

c) Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z - 2i = 0 \text{ ou} z^2 + (-1 + 3i)z - 4 = 0$$

$$z = 2i \Delta = (-1 + 3i)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 8 - 6i$$

D'après la question 1, les racines carrées de Δ sont : $3 - i$ et $-3 + i$.

$z_1 = \frac{1-3i+3-i}{2} = 2 - 2i$ et $z_2 = \frac{1-3i-3+i}{2} = -1 - i$

Donc $S_{\mathbb{C}} = \{2i ; 2 - 2i ; -1 - i\}$.

3) a) Plaçons les points A , B et C (Voir graphique)

b) Nature du triangle ABC

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{2 - 2i + 1 + i}{2i + 1 + i} = \frac{3 - i}{1 + 3i} = \frac{-i(1 + 3i)}{1 + 3i} = -i$$

Donc, le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

c) Déterminons l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme

Pour que $ABCD$ soit un parallélogramme il faut : $z_{\overrightarrow{CD}} = z_{\overrightarrow{BA}}$

$$z_D - z_C = z_A - z_B$$

$z_D - 2i = -1 - i - 2 + 2i$. D'où : $z_D = -3 + 3i$

4) a) Plaçons le point E d'affixe $2 + 2i$ (Voir graphique)

b) Démontrer que les points $A; B; C$ et E sont situés sur un même cercle.

- Le triangle ABC étant rectangle en A, donc il est inscrit dans le cercle de diamètre $[BC]$.
- $\frac{z_C - z_E}{z_B - z_E} = \frac{2i-2-2i}{2-2i-2-2i} = \frac{-2}{-4i} = -\frac{1}{2}i$.

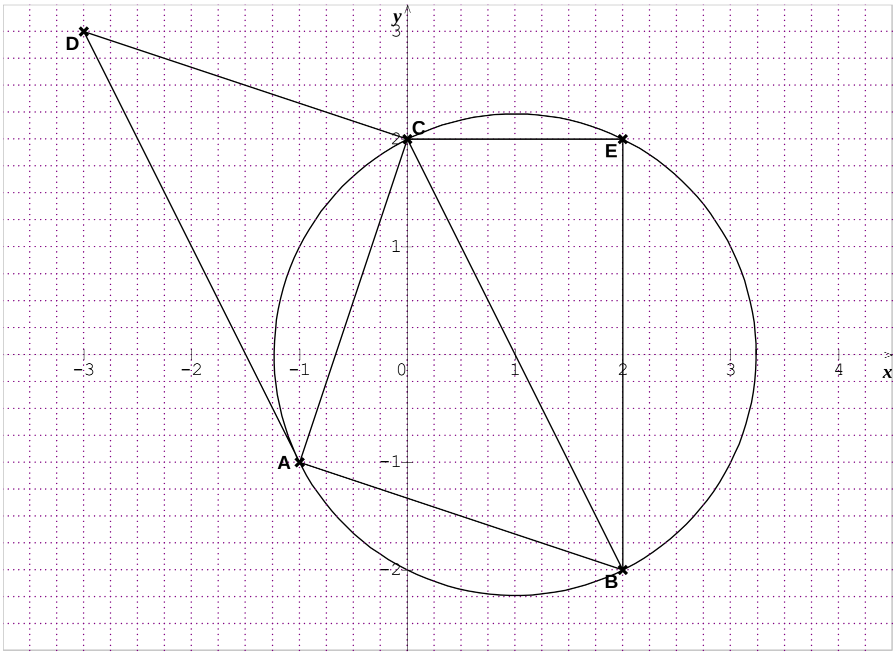
$-\frac{1}{2}i \in i\mathbb{R}^*$, alors le triangle BCE est rectangle en E.

Donc, il est inscrit dans le cercle de diamètre $[BC]$.

Ainsi, les points $A; B; C$ et E sont situés sur le cercle de diamètre $[BC]$.

Son centre est le milieu de $[BC]$. Son affixe est $\frac{z_B+z_C}{2} = 1$, donc c'est le point I.

Son rayon est $= IC = |z_C - z_I| = |-1+2i| = \sqrt{5}$.



Exercice 6

1) Détermine le module, un argument, la partie imaginaire et la partie réelle des racines quatrièmes de $-i$
2) Place dans le plan complexe les points images de ces racines
3) Calcule la somme et le produit de ces racines

Exercice 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$ d'unité 1 cm.

On considère dans C l'équation (E) : $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0$.

1) Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on précisera.

2) Déterminer les nombres complexes a et b tels que :

$$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z - z_0)(z^2 + az + b)$$

3) Résoudre l'équation (E).

4) Soit A , B et C les points d'affixes respectives $4+i$, $4-i$ et $-i$.

a) Placer ces points dans le repère $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$

b) Ω est le point d'affixe 2. Calculer l'affixe du point S tel que ΩAS soit un triangle isocèle et rectangle en Ω de sens direct.

c) Démontrer que les points B, A, S et C appartiennent à un même cercle (Γ) dont on précisera le centre et le rayon.

V-DOCUMENTS

Collection Inter Africain de Mathématiques (CIAM) TERMINALE SM

THEME : FONCTIONS NUMERIQUES

Leçon 7 : FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pour son premier stage pratique dans l'infirmerie de ton établissement, un étudiant en médecine reçoit un élève malade. Il lui donne un médicament qu'il prend immédiatement.

La fonction qui modélise la masse M, en mg de ce médicament encore présent dans le sang, t heures après sa prise, est la fonction telle que : $M(t) = 50.e^{-0.75t}$

L'étudiant affirme que la prochaine prise de ce médicament se fera lorsque le taux de présence dans le corps de la première prise est en dessous de 20%.

L'élève malade veut savoir quand il pourra effectuer la prochaine prise. Pour cela il te sollicite.

Motivés pour la cause, les élèves de la classe s'organisent et décident de faire des recherches sur le comportement de cette fonction.

B – CONTENU DE LA LEÇON

I. FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

1. DEFINITION – PROPRIETES ALGEBRIQUES

a) Définition

On appelle fonction exponentielle népérienne, notée exp, la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien.

Notation :

$$\begin{aligned} exp :\ & \mathbb{R} \to \left]0;+\infty\right[\\ & x \longmapsto exp(x) \end{aligned}$$

Pour tout nombre réel x, le nombre $exp\,(x)$ se note également e^x : $exp(x) = e^x$.

b) Conséquences

- La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$
- Pour tout nombre réel x et pour tout nombre réel strictement positif y , on a : $e^x = y \Leftrightarrow x = lny$
- Pour tout réel x, $e^x > 0$
- $e^0 = 1$; $e^1 = e$
- Pour tout nombre $x \in \left]0;+\infty\right[$, on a : $e^{lnx} = x$
- Pour tout nombre réel y , on a : $ln(e^y) = y$
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Propriétés algébriques

Pour tous nombres réels a et b et pour tout nombre rationnel r, on a :

$$e^a \times e^b = e^{a+b} \quad , \quad e^{-b} = \frac{1}{e^b} \, , \quad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \quad \text{et} \quad (e^a)^r = e^{a\times r}$$

Exercice de fixation

Ecris plus simplement : $\ln\sqrt{e}$; $e^{(x+\ln 3)}$; $\frac{e^{2x}}{e^x}$

Solution

$\ln\sqrt{e} = \ln(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$; $e^{(x+\ln 3)} = e^x e^{\ln 3} = 3e^x$; $\frac{e^{2x}}{e^x} = e^{2x}e^{-x} = e^x$

d) Equations et inéquations

Propriété

Pour tous nombres réels a et b, on a : $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$ et $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

Exercice de fixation

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune les équations suivantes :

1) $e^{2x-1} = e^{x+5}$
2) $e^{x-2} = 5$
3) $e^{2x} + e^x - 6 = 0$

Corrigé

1) Ensemble de validité V	2) Ensemble de validité V	3) Ensemble de validité V
V $=\mathbb{R}$ $e^{2x-1} = e^{x+5}$ $\Leftrightarrow 2x - 1 = x + 5$ $\Leftrightarrow x = 6$ Comme $6 \in$ V, $S_{\mathbb{R}} = \{6\}$	V $=\mathbb{R}$ $e^{x-2} = 5$ $\Leftrightarrow e^{x-2} = e^{\ln 5}$ $\Leftrightarrow x - 2 = \ln 5$ $\Leftrightarrow x = 2 + \ln 5$ $2 + \ln 5 \in$ V, $S_{\mathbb{R}} = \{2 + \ln 5\}$	V $=\mathbb{R}$ $e^{2x} + e^x - 6 = 0$ $\Leftrightarrow (e^x)^2 + e^x - 6 = 0$ Posons **:** $X = e^x$. **Donc $X > 0$** L'équation devient : $X^2 + X - 6 = 0$ Résolution de cette équation : $\Delta = 1 + (-4) \times (-6) = 25 = 5^2$ $X = \frac{-1-5}{2}$ ou $X = \frac{-1+5}{2}$ $X=-3$ ou $X=2$, X = - 3 est impossible car **$X > 0$.** $X = 2 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$ $\ln 2 \in$ V, $S_{\mathbb{R}} = \{\ln 2\}$

Résous dans ℝ chacune les inéquations suivantes :

1) $e^{2x-1} < 8$
2) $e^{2x} - 5e^{x} + 6 \geq 0$

Corrigé

1)Ensemble de validité V

V =ℝ

$e^{2x-1} < 8$

$\Leftrightarrow \ln(e^{2x-1}) < \ln 8$

$\Leftrightarrow 2x - 1 < \ln 8$

$\Leftrightarrow x < \frac{1+\ln 8}{2}$

$\Leftrightarrow x \in \left]-\infty ; \frac{1+\ln 8}{2}\right[$

$$S_{\mathbb{R}} = V \cap \left]-\infty ; \frac{1+\ln 8}{2}\right[$$
$$= \left]-\infty ; \frac{1+\ln 8}{2}\right[$$

2) $e^{2x} - 5e^{x} - 6 \geq 0$

Ensemble de validité V : V =ℝ

Posons $e^{x} = X$, donc $X > 0$. On a $X^2 - 5X + 6 \geq 0$

$\Delta = 25 - 24 = 1$

$X = 2$ ou $X = 3$

Etudions le signe de $X^2 - 5X + 6$

X	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$X^2 - 5X + 6$		+	0	-	0	+	

$X^2 - 5X + 6 \geq 0 \Leftrightarrow X \in]-\infty ; 2] \cup [3 ; +\infty[$

D'ou $e^{2x} - 5e^{x} - 6 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x} \in]-\infty ; 2] \cup [3 ; +\infty[$

$\Leftrightarrow e^{x} \leq 2$ ou $e^{x} \geq 3$

$\Leftrightarrow x \leq \ln 2$ ou $x \geq \ln 3$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty ; \ln 2] \cup [\ln 3 ; +\infty[$

$S_{\mathbb{R}} = V \cap (]-\infty ; \ln 2] \cup [\ln 3 ; +\infty[)$

$=]-\infty ; \ln 2] \cup [\ln 3 ; +\infty[$

2- ETUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

a) Limites de référence

$$\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0 \ ; \quad \lim_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty \ ; \quad \lim_{x \to -\infty} x e^{x} = 0 \ ; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1$$

Exercice de fixation

Calcule les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1)\, e^{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x(e^{-x} + 1)$

Solution

- $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1)\, e^{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} (x\, e^{x} + e^{x}) = 0$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x\, e^{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0 \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x(e^{-x} + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\frac{1}{e^{x}} + 1\right) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{x}} + 1 = 1 \end{cases}$

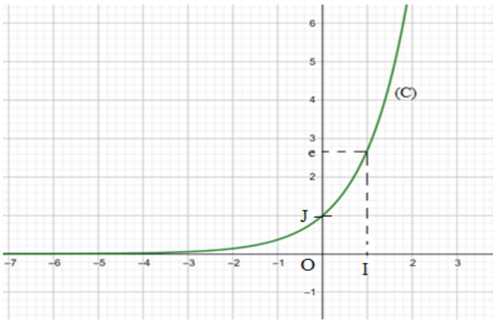
b) Dérivée

La fonction exponentielle népérienne est dérivable sur ℝ et sa fonction dérivée est :$x \longmapsto e^{x}$

3 Tableau de variation et courbe représentative

La fonction exponentielle népérienne est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
exp'(x)	+	
exp(x)	0 ↗	$+\infty$



3 . DERIVEES - PRIMITIVES

a) Dérivée de la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$

Propriété
Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K, alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur K

Pour tout x élément de K on a : on a : $(e^u)'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$

Exercice de fixation

Calcule les dérivées sur IR des fonctions suivantes : $f(x) = e^{2cosx}$ et $g(x) = e^{x^3-4x-1}$

Solution

- Pour tout nombre réel x, $f'(x) = (-2sinx)e^{2cosx}$
- Pour tout nombre réel x,$g'(x) = (-3x^2 - 4)e^{x^3-4x-1}$

b) Primitive de la fonction : $x \mapsto u'(x) \times e^{u(x)}$

Propriété
Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K alors la fonction : $x \mapsto u'(x) \times e^{u(x)}$ a pour primitives sur K , les fonctions : $x \mapsto e^{u(x)} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

Exercice de fixation

Détermine sur $\mathbb{R}$ les primitives de chacune des fonctions suivantes :

$a)$ $\mathrm{f(x) = e^x}$, b) $\mathrm{f(x) = (sin2x)e^{cos2x}}$, c) $\mathrm{f(x) = xe^{x^2}}$

Solution

a) Déterminons les primitives de la fonction f telle que : $\mathrm{f(x) = e^x}$ sur $\mathbb{R}$.
Les primitives de f sur $\mathbb{R}$, sont les fonctions F telles que : $\mathrm{F(x) = e^x + \alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

b) Déterminons les primitives de la fonction f telle : $\mathrm{f(x) = (sin2x)e^{cos2x}}$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $u(x) = \cos 2x$ et $u'(x) = -2\sin 2x$,on a : $u'(x)e^{u(x)} = -2(\sin 2x)e^{\cos 2x}$;$f(x) = \frac{-1}{2}\, u'(x)e^{u(x)}$

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F telles que : $F(x) = -\frac{1}{2}e^{\cos 2x} + \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$.

c) Déterminons les primitives de la fonction f telle que : $f(x) = xe^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$, on a : $u'(x)e^{u(x)} = 2xe^{x^2}$; $f(x) = \frac{1}{2}\, u'(x)e^{u(x)}$
Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F telles que : $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

II . FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

1- Fonction exponentielle de base a

a- Définition

Soit a est un nombre réel strictement positif.
On appelle fonction exponentielle de base a, notée exp_a , la fonction : $x \mapsto a^x$ et définie sur $\mathbb{R}$ par : $exp_a(x) = a^x = e^{xlna}$

Remarques

- Pour tout nombre réel x, $a^x > 0$
- La fonction exponentielle de base 1 est la fonction constante : $x \mapsto 1$
- La fonction exponentielle de base e est la fonction exponentielle népérienne

Exercice de fixation

Exprime sous forme $e^{u(x)}$ les expressions suivantes : 5^x et 12^x

Solution

$5^x = e^{xln5}$ et $12^x = e^{xln12}$

b- Dérivée et sens de variation de la fonction exp_a

Propriété

- Pour tout nombre réel a strictement positif et différent de 1 , la fonction exp_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x on a : $exp_a{}'(x) = ln(a) \times a^x$

- Si $0 < a < 1$, $ln(a) < 0$ alors la fonction exp_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a > 1$, $ln(a) > 0$ alors la fonction exp_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Conséquence

Pour tout nombre réel strictement positif a, et pour tous nombres réels x et y on a :

- $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$
- Si $0 < a < 1$, alors $a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$
- Si $a > 1$, alors $a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$

c- Limites de référence

- Si $0 < a < 1$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$
- Si $a > 1$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$

d- Représentation graphique

Exercice de fixation

Résoudre dans $\mathbb{R}$

1) $2^{x-9} = 8^{3x+1}$
2) $(0,7)^{-x} = (0,7)^{-5x+1}$

Solution

1) $2^{x-9} = 8^{3x+1} \Leftrightarrow 2^{x-9} = 2^{3(3x+1)} \Leftrightarrow x-9 = 3(3x+1) \Leftrightarrow x = \frac{-3}{2}$; $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{-3}{2}\right\}$

2) $(0,7)^{-x} < (0,7)^{-5x+1} \Leftrightarrow -x > -5x+1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}$; $S_{\mathbb{R}} = x \in \left]\frac{1}{4}; +\infty\right[$

2- Fonctions puissances d'exposant α

a- Définition

Soit α un nombre réel non nul.

On appelle fonction puissance d'exposant α, la fonction : $x \mapsto x^{\alpha}$

Cette fonction est définie sur $]0;+\infty[$ par : $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$

b- Remarque

Les règles de calculs sur les puissances d'exposants rationnels s'appliquent pour ces fonctions puissances d'exposants réels

3- Croissances comparées

Propriété

Soit α un nombre réel strictement positif, on a :

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0$; (2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^{\alpha} \ln x = 0$; (3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^{\alpha}} = +\infty$; (4) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} e^{-x} = 0$

Exercice de fixation

Calcule les limites suivantes

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^5}$; (2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^2 \ln x$; (3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3} =$; (4) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^8 e^{-x}$

Solution

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^5} = 0$; (2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^2 \ln x = 0$; (3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$; (4) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^8 e^{-x} = 0$

C- SITUATION COMPLEXE

Des élèves de terminale travaillent les samedis dans le service marketing d'un grand magasin. Ce magasin veut informer la population des nouvelles offres promotionnelles. Le service marketing a observé que la proportion P de la population qui est au courant de ces nouvelles offres après *t* jours d'annonces publicitaires est donnée par la fonction : $P(t) = 1 - e^{-0,21t}$.

Le magasin veut arrêter cette publicité lorsque au moins 90 % de la population sera au courant des nouvelles offres. Un de tes camarades de classe affirme que cela n'excédera pas une semaine.

Donne ton avis argumenté sur l'affirmation de cet élève.

Solution

- ✓ Pour donner mon avis sur l'affirmation de cet élèves ,je vais résoudre une inéquation en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle et conclure .

- ✓ Déterminer le nombre de jours nécessaires au grand magasin pour faire la publicité de ces nouvelles offres revient à déterminer le nombre de jours pour que la proportion de la population qui est au courant de ces nouvelles offres atteigne 90%.

C'est-à-dire : $1 - e^{-0,21t} \geq 0,9$, soit $e^{-0,21t} \leq 0,1$ donc $-0,21t \leq ln0,1$, ainsi $t \geq \frac{ln0,1}{-0,21}$

et donc $t \geq 10,96$ donc on peut prendre t = 11

Conclusion : puisque $11 > 7$, l'affirmation de cet élève est fausse.

IV- <u>EXERCICES</u>

C1 <u>EXERCICES DE FIXATION</u>

<u>Exercice</u> 1

Ecris plus simplement chacun des nombres suivants :

$A = \frac{e^6}{e^3}$; $B = \frac{e^{-3}}{e^{-7}}$; $C = \frac{e^5 \times e^{-2}}{e^3}$; $D = e^6 \times e^{-4}$; $E = \left(e^{-4}\right)^3$

Exercice 2

Ecris plus simplement chacune des expressions suivantes :

a) $(e^x)^3 e^{2x}$ b) $\frac{e^{3x}}{(e^{-x})^2}$ c) $\frac{e^x e^y}{e^{x-y}}$

Exercice 3

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations proposées :

a) $e^{3-x} = 1$ b) $e^{2x^2+3} = e^{7x}$

c) $(e^x - 2)(e^{-x} + 1) = 0$ d) $2 - e^x = 0$

<u>Exercice</u> 4

Détermine la limite des fonctions suivantes en a :

a) $f(x) = e^x - 2x + 1$, $a = -\infty$; b) $g(x) = -e^x - x - 3$, $a = +\infty$;

c) $h(x) = xe^x - x^2 - 2x + 2$, $a = 0$.

Exercice 5

Détermine la limite des fonctions suivantes en a :

a) $f(x) = (2x + 1)e^x + \frac{1}{x}$, pour $a = +\infty$;

b) $g(x) = (2x - 3)e^{-x}$, pour $a = -\infty$;

Exercice 6

Détermine la limite des fonctions suivantes en $+\infty$ et en $-\infty$:

a) $f(x) = (2 - 3x)e^x$; b) $g(x) = (x + 1)e^{-x}$; c) $h(x) = 3 - 2x + e^x$

Exercice 7

Dans chacun des cas suivants, on admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calcule la fonction dérivée de f.

a) $f(x) = e^{-2x+1}$ b) $f(x) = x + 2 - e^x$ c) $f(x) = (1 - x)e^x$

Exercice 8

Détermine la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = (-2x+5)e^x$; $g(x) = (-3x^2+5)e^x$; $h(x) = \frac{e^x - 1}{x+1}$; $k(x) = \frac{e^x + 2}{e^{x-1}}$.

Exercice 9

Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = e^{-4x} + 2x$
b) $f(x) = 2xe^{x^2}$
c) $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$
d) $f(x) = x - 5 + 3e^{-2x+1}$

Exercice 10

Détermine une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = 3x^2e^{x^3}$; $g(x) = e^x + 1$; $h(x) = 2xe^{x^2-1}$.

C2 EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 11

Résous dans IR les équations suivantes :(1) $e^{(-x^2+2x+4)} = 5$, (2) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

Exercice 12

Résous dans IR les inéquations suivantes

(1) $e^{2x} - 3e^{x} + 2 < 0$

(2) $e^{(-x^2 + 2x + 4)} > 1$

Exercice 13

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x en posant $X = e^x$.

a) $e^{2x} + e^x + 3 = 0$;

b) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$;

c) $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$;

d) $-3e^{2x} - 9e^x + 12 = 0$.

Exercice 14

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

a) $2e^{2x} - 3e^x - 2 \leq 0$; b) $(ex + 1)(e - x - 1) \leq 0$; c) $\dfrac{e^x+1}{x+2} \geq 0$; d) $\dfrac{x\left(e^{-x}-1\right)}{x-3} \geq 0$.

Exercice 15

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $2^x + 1 + 2^{-x} = 0$

Exercice 16

1. On donne $p(x) = 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4$.
   a) Vérifie que $p(-1) = 0$
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :
   $2e^{3x} - 7e^{2x} - 5e^x + 4 < 0$.

Exercice 17

Calcule la dérivée et étudie les variations de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = xe^{2x} - 1$; $g(x) = x - 1 + e^x$

Exercice 18

Détermine la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x+2}$; b) $g(x) = \dfrac{e^x+2}{x+2}$; c) $h(x) = \dfrac{xe^x}{x+1}$

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-2)e^x$

a) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Calcule la dérivée f' de f

c) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.

Exercice 20

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - 4)e^{2x}$

1) Détermine les nombres réels $\alpha; \beta$ et γ pour que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)= (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^{2x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f
2) Détermine la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f qui s'annule en 0

C3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 21

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est le centimètre.

On considère la fonction f dérivable et définie sur $]-\infty ; 2]$ par $f(x) = (-2x + 3)e^x$.

On note (C) la représentation graphique de f dans le repère (O, I, J).

1. calcule $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, puis interprète graphiquement ce résultat.

2.a) détermine , $f'(x)$ sur $]-\infty ; 2]$

b) Etudie le signe de la dérivée f' sur $]-\infty ; 2]$ et Déduis-en les variations de f sur$]-\infty ; 2]$.

c) Dresse le tableau de variation de f sur$]-\infty ; 2]$.

3. Soit A le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses et B le point d'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées.

Détermine les coordonnées respectives des points A et B.

4. Construis (C) sur l'intervalle $]-\infty ; 2]$.

Exercice 22

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = (2-x)e^x$.

a) Calcule la limite de f en $+\infty$.
b) Calcule la dérivée f' de f
c) Etudie les variations de f
d) Dresse le tableau de variation de f sur $[0 ; +\infty [$.
e) Trace la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé (O, I, J).
f) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique a sur $[1 ; 2]$.
g) Déduis-en une étude du signe de $f(x)$.

Exercice 23

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 1 - x + e^x$. On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J),

1. Précise l'ensemble de définition de f, noté D_f.

2. Calcule la limite de f en $-\infty$.

3. a) Vérifie que pour tout nombre réel $x \neq 0$, $f(x) = x\left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{e^x}{x}\right)$

b) Déduis-en la limite de f en $+\infty$.

4. a) Démontre que la droite (Δ) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$

b) Précise la position relative de (C) par rapport à (Δ).

5. a) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calcule $f'(x)$.

b) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$

c) Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) > 0$

d) Déduis-en les variations de f et dresse son tableau de variations.

Exercice 24

PARTIE A

On considère la fonction g de$\mathbb{R}$vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = 1 - x - 2e^{-x}$.
Etudier les variations de g (on ne demande pas de calculer les limites).
a) Calculer g (ln2).
b) En déduire que pour tout réel x ; $g(x) < 0$.
PARTIE B

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle $f(x) = e^{-x}(x + e^{-x})$ e^{-x}
On appelle(C) sa représentation graphique dans le repère orthonormé (O ; I ; J). Unité graphique 2cm.
1- a) Calculer la limite de f en$+\infty$.
b) Interpréter graphiquement le résultat.
2- a) Montrer que $f(x) = e^{-2x}(xe^x + 1)$.
Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.
a) Démontrer que pour tout x$\in\mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x}g(x)$.
Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
5- a) Justifier que f est une bijection puis dresser le tableau de variation de f^{-1}.
b) Calculer $f(0)$
c) Calculer $(f^{-1})'(1)$.
d) Tracer (T) ; (C) et (C') la courbe de f^{-1}.

PARTIE C

On considère la fonction F de $\mathbb{R}$vers $\mathbb{R}$ définie par: $\boldsymbol{F(x)}$= e^{-x} (ax +b+ c$e^{-x)}$.

1) Déterminer les réels a ; b et c pour que F soit une primitive de f.
2) Déterminer une pimitive F de f qui prend la valeur 0 en 1

Exercice 25

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = (2 - x)e^x + 2 - x$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé$(O; I; J)$, unité1 cm.

Partie A

On donne la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $h(x) = (1 - x)e^x - 1$.

1- Etudier le sens de variation de h puis dresser son tableau de variation.
$(on\ ne\ calculera\ pas\ les\ limites\ en\ -\infty\ et\ en\ +\infty)$

2- En déduire que $\forall\ x \in\ ]-\infty; 0[\ \cup\ ]0; +\infty[, h(x) < 0$.

Partie B

1- Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2- **a**. Justifier que $\forall\ x \in \mathbb{R}, f'(x) = h(x)$.
b. Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

3- Montrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = 2 - x$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.

4- Etudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$.

5- Déterminer les coordonnées du point K de $(\mathcal{C})$ où la tangente $(\mathcal{T})$ à $(\mathcal{C})$ est parallèle à $(\mathcal{D})$.

6- Déterminer les coordonnées des points A et B où $(\mathcal{C})$ coupe respectivement les droites (OI) et (OJ).

7- Construire $(\mathcal{C}), (\mathcal{D})$ et $(\mathcal{T})$; $\left(on\ ne\ déterminera\ pas\ une\ équation\ de\ (\mathcal{T})\right)$.

Partie C

Soit g la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $g(x) = (3 - x)e^x + 2x - \frac{x^2}{2}$.

1- Justifier que g est une primitive sur $\mathbb{R}$ de f.

2- Déterminer la primitive F sur $\mathbb{R}$ de f qui prend la valeur $\frac{3}{2}$ en 0.

4. SITUATION COMPLEXE

Exercice 27

Le président du conseil régional fait mener une étude sur l'évolution de la population dans une zone de son territoire qui compte 10200 habitants en vue de prévoir la construction de centres de santé. L'expert lui dit que l'évolution de la population dans cette zone se fait suivant la formule : 10200 $e^{0,5n}$ où n est le nombre d'années écoulées. Le président veut savoir au bout de combien d'année cette population dépassera 20000 habitants. L'expert étant parti, il te sollicite.
Réponds a la préoccupation du président.

Exercice 28

Une conférence a été prononcée dans une ville pour inviter la population à investir. Les élèves de la de ta classe y ont été aussi invités. À cette occasion, le conférencier a affirmé que le pouvoir d'achat d'un dollar actuel dans t années sera donné par la formule suivante : $A(t) = 0.95^t$.
D'autres personnes de ton quartier présentes à cette conférence et soucieuses de l'avenir, veulent savoir dans combien d'années le pouvoir d'achat sera la moitié de ce qu'il est aujourd'hui. Elles te sollicite. Réponds à leur inquiétude.

Corrections d'exercices

Exercice 3

a) $e^{3-x} = 1 \Leftrightarrow 3 - x = \ln(1) \Leftrightarrow 3 - x = 0$

b) $e^{2x^2+3} = e^{7x} \Leftrightarrow 2x^2 + 3 = 7x \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 3 = 0$

c) $(e^x - 2)(e^{-x} + 1) = 0 \Leftrightarrow (e^x - 2) = 0$ ou $(e^{-x} + 1) = 0 \Leftrightarrow (e^x - 2) = 0 \Leftrightarrow e^x = 2$

d) $2\text{-}e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 2$

Exercice 10

$F(x) = e^{x^3}$; $G(x) = e^x + x$; $H(x) = e^{x^2-1}$

Exercice 11

(1) $e^{(-x^2+2x+4)} = 5 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 4 = \ln(5)$

(2) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ posons X= e^x
ainsi $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow$ X= 1 ou X= 2 , donc $e^x = 1$ ou $e^x = 2$

Exercice 20

1) F'(x)= $(2\alpha x + \beta)e^{2x} + (2\alpha x^2 + 2\beta x + 2\gamma)e^{2x} = [2\alpha x^2 + (2\alpha + 2\beta)x + (\beta + 2\gamma)]e^{2x}$ donc

$2\alpha = 1$; $2\alpha + 2\beta = 0$ et $\beta + 2\gamma = -4$, ainsi : $\alpha = \frac{1}{2}$; $\beta = -\frac{1}{2}$ et $\gamma = -\frac{7}{4}$

2) F(x)= $(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4})e^{2x} + C$ or F(x)= $0 \Leftrightarrow -\frac{7}{4} + C = 0$ donc $C = \frac{7}{4}$ et ainsi la primitive cherchée est F(x)= $(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4})e^{2x} + \frac{7}{4}$

Exercice 21

1. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -2xe^x + e^x$

$= 0$, car $\lim_{x\to-\infty} -2xe^x = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe en $-\infty$

2.a) pour tout élément x de $]-\infty\,;2]$, $f'(x) = -2e^x + (-2x + 3)e^x$

$= (-2x + 1)e^x$

Donc pour tout élément x de $]-\infty\,;2]$, $f'(x) = (-2x + 1)e^x$

b) Etudions le signe de la dérivée f' sur $]-\infty\,;2]$.

pour tout élément x de $]-\infty\,;2]$, $e^x > 0$ donc le signe f' est celui de $-2x + 1$, ainsi, pour tout élément x de $\left]-\infty\,; \frac{1}{2}\right]$, $f'(x) \geq 0$ et pour tout élément x de $\left[\frac{1}{2}\,; 2\right]$, $f'(x) \leq 0$

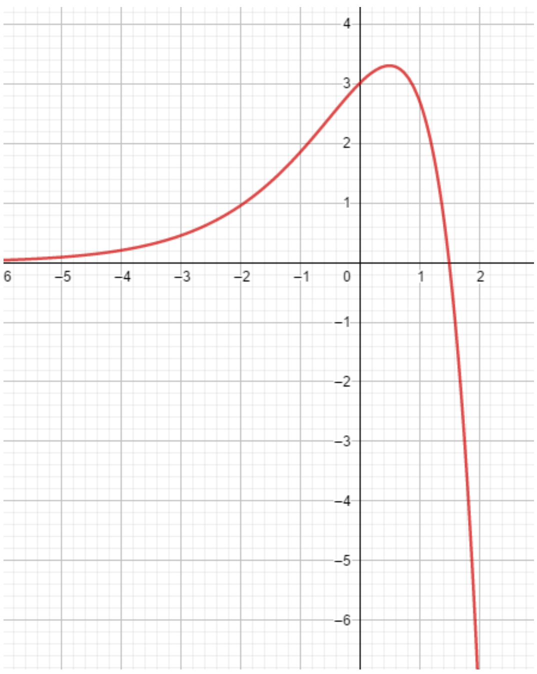
Ainsi : f est croissante sur de $\left]-\infty\,; \frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{2}\,; 2\right]$

c) Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2e^{\frac{1}{2}}$	$\searrow$	$-e^{2}$

3) $f\,(0) = 3$ et $f\,(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$, on en déduis que : A($\frac{3}{2}$; 0) et B(0 ; 3).

4)



Exercice 26

Déterminer le nombre de jours nécessaires au grand magasin pour faire la publicité de ces nouvelles offres revient à déterminer le nombre de jours pour que la proportion de la population qui est au courant de ces nouvelles offres atteigne 90%.

C'est-à-dire : $1 - e^{-0,21t} = 90\%$, soit $e^{-0,21t} = 0,1$ donc $-0,21t = ln0,1$, ainsi $t = \frac{ln0,1}{-0,21}$ et donc $t = 11$

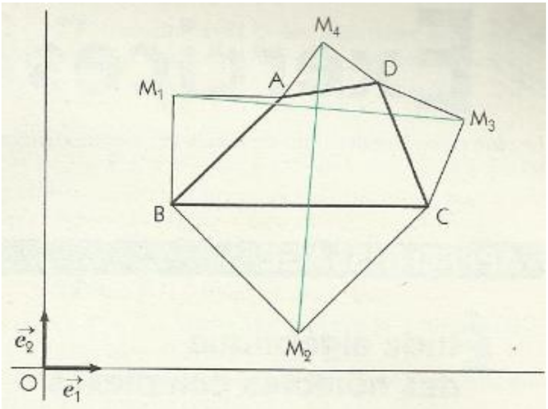
Le grand magasin fera la publicité pendant 11 jours.

THEME : TRANSFORMATION DU PLAN

Durée : 12 heures **Code :**

Leçon 08 : NOMBRES COMPLEXES ET GEOMETRIE DU PLAN

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE



Des élèves d'un lycée ont décoré avec différentes figures géométriques les murs de la salle du club de Mathématiques.
La figure ci-contre représentant l'une d'elles est constituée d'un quadrilatère ABCD de sens direct et de triangles rectangles isocèles AM_1B, BM_2C, CM_3D et DM_4A de sommets respectifs M_1, M_2, M_3 et M_4.
Observant attentivement cette figure, l'un des élèves de la promotion de Terminale, passionné de nombres complexes et géométrie, affirme que les segments $[M_1M_3]$ et $[M_2M_4]$ ont des supports perpendiculaires et ont la même longueur. D'autres élèves n'étant pas de cet avis, portent le problème aux autres.
Ceux-ci décident d'effectuer des calculs pour vérifier cette affirmation.

B-CONTENU DE LA LEÇON

1. ENSEMBLE DE POINTS ET NOMBRES COMPLEXES

1) Interprétation de $\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_D}\right)$ et de $\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_D}\right|$

a) Interprétation de $\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_D}\right)$

Propriété

Si A, B, C et D sont des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que

A$\neq$ B et C$\neq$ D, alors $\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_D}\right)$ est une mesure de l'angle orienté$(\widehat{\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BA}})$.

Autrement dit : $mes\ (\widehat{\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BA}}) = \arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_D}\right) + 2k\pi,\ k\epsilon\mathbb{Z}$

Exercice de fixation

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O ;I ;J)

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $-1+i\sqrt{3}$; 2 et $-1-i\sqrt{3}$.

Détermine la mesure principale de l'angle orienté$(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}})$.

Solution

$z_A \neq z_B$ et $z_B \neq z_C$. donc les points A, B et C sont tels que A ≠B et B ≠C.

On a : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}}) = \text{Arg}\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right)$.

Calculons $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$

$$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B} = \frac{-1+i\sqrt{3}-2}{-1-i\sqrt{3}-2}$$
$$= \frac{-3+i\sqrt{3}}{-3-i\sqrt{3}}$$
$$= \frac{(-3+i\sqrt{3})(-3+i\sqrt{3})}{(-3-i\sqrt{3})(-3+i\sqrt{3})}$$
$$= \frac{9-6i\sqrt{3}-3}{9+3}$$
$$= \frac{6-6i\sqrt{3}}{12}$$
$$= \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Posons $Arg\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \alpha$.

On a $\begin{cases} cos\alpha = \frac{1}{2} \\ sin\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. Donc $\alpha = -\frac{\pi}{3}$

D'où : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}}) = Arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right)$
$$= Arg\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$
$$= -\frac{\pi}{3}.$$

Par suite la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}})$ est $-\frac{\pi}{3}$.

b) Interprétation de $\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_D}\right|$

Propriété

Si A, B, C et D sont des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que C≠ D, alors :
$\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_D}\right| = \frac{AB}{CD}$.

Exercice de fixation

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère les points non alignés A, B et C d'affixes respectives $-1+i\sqrt{3}$; 2 et $-1-i\sqrt{3}$

1) Donne une interprétation de $\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right|$.

2) Déduis-en que : AB = BC.

Solution

1) On a : $z_B \neq z_C$; ce qui justifie l'existence du quotient $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$

$\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right| = \frac{AB}{BC}$

2) Calculons $\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right|$

$\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right| = \left|\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$

D'où : $\frac{BA}{BC} = 1$ et par suite AB = BC.

TABLEAU RECAPITULATIF

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$).

A et B deux points distincts du plan d'affixes respectives z_A et z_B.
M est un point quelconque du plan d'affixe z et $\vec{u}$ désigne le vecteur-image de z.

CARACTERISATIONS COMPLEXES	CARACTERISATIONS GEOMETRIQUES	ENSEMBLE DE POINTS
$\|z - z_A\| = r,\ r \in \mathbb{R}_+^*$	$AM = r$	Cercle de centre A et de rayon r.
$\|z - z_A\| = \lambda\,\|z - z_B\|\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}_+^*$	$AM = \lambda\ BM$ Ou bien $\frac{AM}{BM} = \lambda$	- la médiatrice du segment [AB] lorsque $\lambda = 1$ - le cercle de diamètre $[G_1G_2]$ lorsque $\lambda \neq 1$, où G_1 = bar {(A ;1), (B; λ)} et G_2 = bar {(A ;1), (B;- λ)}
$\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$	$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = k\pi\ ,$ $k \in \mathbb{Z}$	La droite (AB) privée des points A et B.
$\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$	$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi,$ $k \in \mathbb{Z}$	Le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.
$\arg(z - z_A) = \alpha + k\pi,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{AM}}\right) = \alpha + k\pi,$ $k \in \mathbb{Z}$	la droite de repère (A, $\vec{u}$), privée de A, où $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{e_1},\ \vec{u}}\right) = \alpha$
$\arg(z - z_A) = \alpha + k2\pi, \alpha \in \mathbb{R}$	$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{AM}}\right) = \alpha + 2k\pi,$ $k \in \mathbb{Z}$	la demi-droite de repère (A, $\vec{u}$), privée de A, où $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{e_1},\ \vec{u}}\right) = \alpha$

<u>**Exercices de fixation**</u>

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$), A et B deux points distincts du plan d'affixes respectives z_A et z_B, M est un point quelconque du plan d'affixe z et de vecteur-image $\vec{u}$.
Associe chaque caractérisation complexe à l'ensemble des points du plan qui convient

caractérisations complexes			**ensembles**
$\|z - z_A\| = r,\ r \in \mathbb{R}_+^*$	**A**	**1**	Le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.
$\|z - z_A\| = \lambda\,\|z - z_B\|\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}_+^*$	**B**	**2**	la droite de repère (A, $\vec{u}$), privée de A, où $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{e_1},\ \vec{u}}\right) = \alpha$
$\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = k\pi$	**C**	**3**	la demi-droite de repère (A, $\vec{u}$), privée de A, où $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{e_1},\ \vec{u}}\right) = \alpha$
$\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$	**D**	**4**	Cercle de centre A et de rayon r.
$\arg(z - z_A) = \alpha + k\pi,\ \alpha \in \mathbb{R}$	**E**	**5**	- la médiatrice du segment [AB] lorsque $\lambda = 1$ - le cercle de diamètre $[G_1G_2]$ lorsque $\lambda \neq 1$, où G_1 = bar {(A ; 1), (B;λ)} et G_2 = bar {(A ;1), (B;- λ)}
$\text{Arg}(z - z_A) = \alpha + k\pi, \alpha \in \mathbb{R}$	**F**	**6**	La droite (AB) privée des points A et B.

Solution
A-4 ; B-5 ; C-6 ; D-1 ; E-2 ; F-3

<u>Exercice de fixation 2</u>

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$). Détermine l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|2iz - 3 + 2i| = |z - 2|$.

Solution

$$|2iz - 3 + 2i| = |z - 2| \Leftrightarrow \left|2i\left(z + 1 + \frac{3}{2}\,i\right)\right| = |z - 2| \Leftrightarrow 2\left|z + 1 + \frac{3}{2}i\right| = |z - 2|$$

$$\Leftrightarrow 2\left|z - (-1 - \frac{3}{2}i)\right| = |z - 2| \Leftrightarrow 2\text{ BM} = \text{AM où A et B sont}$$

les points d'affixes respectives 2 et $-1 - \frac{3}{2}i$.

$$\Leftrightarrow \frac{\text{MA}}{\text{MB}} = 2.$$

On considère les points H et K tels que H = bar {(A ; 1), (B ; 2)} et K = bar {(A ; 1), (B ;- 2)}.

L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $|2iz - 3 + 2i| = |z - 2|$ est le cercle de diamètre [HK].

On a : $z_{\text{H}} = \frac{1\times2 + 2\times\left(-1-\frac{3}{2}i\right)}{3} = -1$ et $z_{\text{K}} = \frac{1\times2 - 2\times\left(-1-\frac{3}{2}i\right)}{-1} = -4 - 3i.$

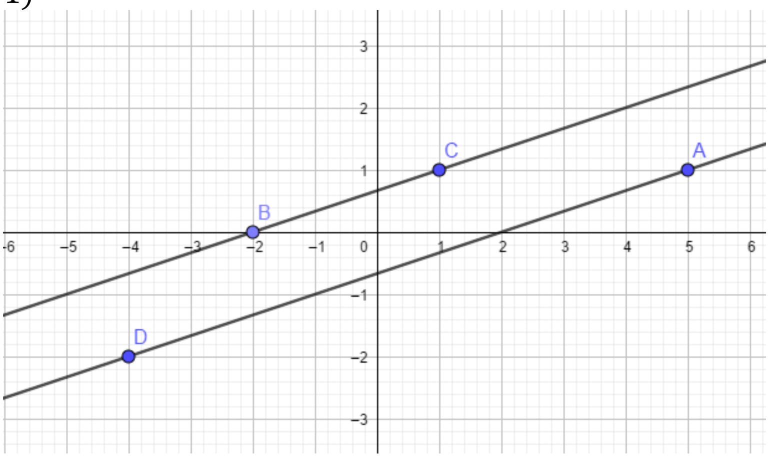
II. CONFIGURATIONS DU PLAN ET NOMBRES COMPLEXES

1) Droites parallèles

Propriété:
A, B, C et D sont des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que : A$\neq$ B et C$\neq$ D.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \in \mathbb{R}^*$.

Exercice de fixation
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $5 + i$; -2 ; $1 + i$ et $-4 - 2i$
1) Trace les droites (AD) et (BC).
2) Démontre que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

Solution
1)



2) On a : $z_A \neq z_B$ et $z_D \neq z_C$. Donc A ≠B et D ≠C.

Calculons : $\frac{z_D - z_A}{Z_C - z_B}$

$$\frac{z_D - z_A}{Z_C - z_B} = \frac{-4-2i-(5+i)}{1+i-(-2)}$$
$$= \frac{-9-3i}{3+i}$$
$$= \frac{-3(3+i))}{3+i} = -3.$$

- 3 $\epsilon \mathbb{R}^*$. Donc $\frac{z_D - z_A}{Z_C - z_B} \epsilon \mathbb{R}^*$. Par suite les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

2) Alignements de trois points

Propriété:

A, B et C sont des points tels que A ≠B et B ≠C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C .

Les points distincts A, B, et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \epsilon \mathbb{R}^*$.

Exercice de fixation

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $2 + i\sqrt{3}$; -1 et $11 + 4i\sqrt{3}$

Démontre que les points A, B et C sont alignés.

Solution

On a : $z_A \neq z_B$ et $z_B \neq z_C$ donc A ≠B et B ≠C.

Calculons : $\frac{z_A - z_B}{Z_C - z_B}$

$$\frac{z_A - z_B}{Z_C - z_B} = \frac{2+i\sqrt{3}-(-1)}{11+4i\sqrt{3}-(-1)}$$
$$= \frac{3+i\sqrt{3}}{12+4i\sqrt{3}}$$
$$= \frac{3+i\sqrt{3}}{4(3+i\sqrt{3})}$$
$$= \frac{1}{4}$$

$\frac{1}{4}$ $\epsilon \mathbb{R}^*$. Donc $\frac{z_A - z_B}{Z_C - z_B} \epsilon \mathbb{R}^*$. Par suite les points A, B et C sont alignés.

3) Droites perpendiculaires

Propriété

A, B, C et D sont des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que : A≠ B et C≠ D.

Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \epsilon i\mathbb{R}^*$.

Exercice de fixation

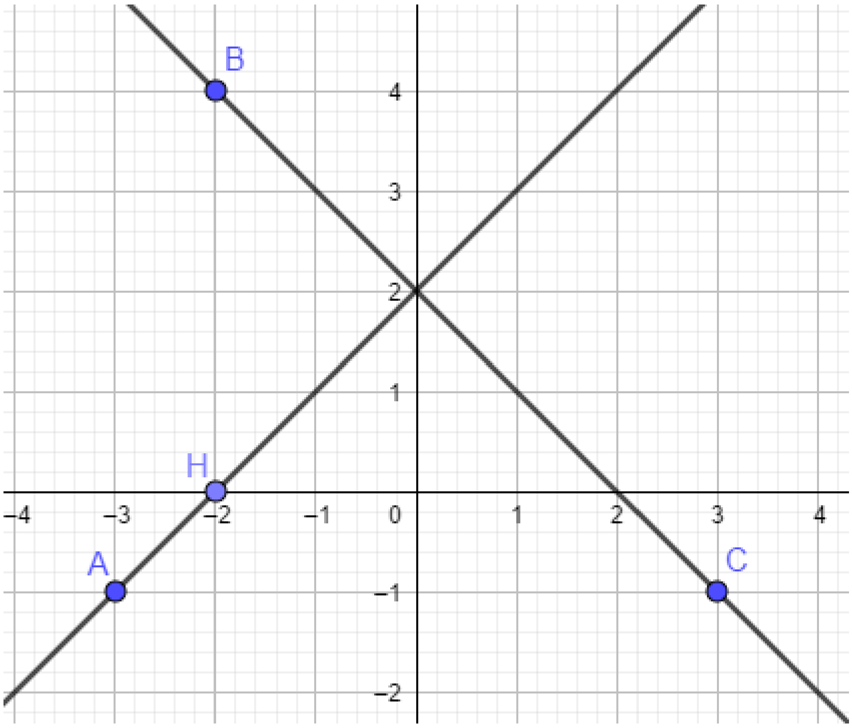
On considère les points A, B, C et H d'affixes respectives $-3 - i$; $-2 + 4i$; $3 - i$ et -2.

1) Trace les droites (AH) et (BC).

2) Démontre que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

Solution

1)



2) On a : $z_A \neq z_H$ et $z_B \neq z_C$ donc A≠ H et C≠ B.

Calculons $\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A}$

$$\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A} = \frac{-2+4i-(3-i)}{-2-(-3-i)} = \frac{-5+5i}{1+i} = \frac{(-5+5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$= \frac{-5+5i+5i+5}{1+1}$$

$$= \frac{10i}{2} = 5i$$

$5i \in i\mathbb{R}^*$. Donc les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

4) Points cocycliques

(C'est-à-dire des points situés sur un cercle)

Propriété

A, B, C et D sont des points deux à deux distincts et non alignés d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D.

A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} : \frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} \in \mathbb{R}^*$

Exercice de fixation

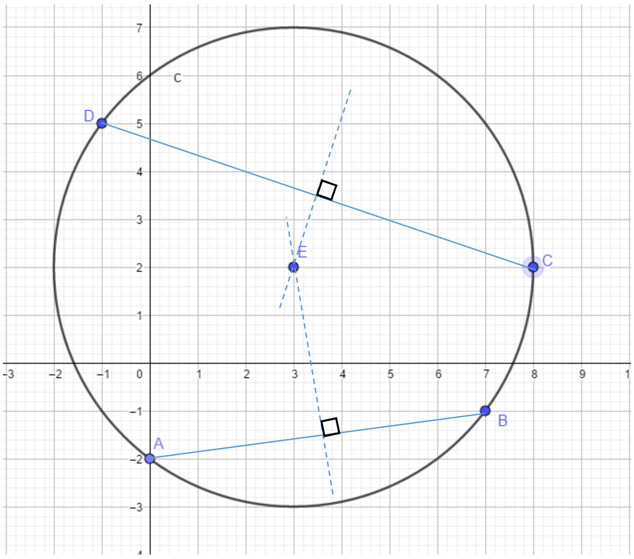
Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé (O, I, J), on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $-2i$; $7 - i$ et $8 + 2i$ et $-1 + 5i$.

a) Place les points A, B, C et D dans le repère.

b) Démontre que les points A, B, C et D sont cocycliques.

Solution

a)



b) On a : $z_B \neq z_A$ et $z_B \neq z_C$. Calculons $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$ et $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_C}$

$$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-1+5i-(-2i)}{7-i-(-2i)}$$

$$= \frac{-1+7i}{7+i} = \frac{(-1+7i)(7-i)}{(7+i)(7-i)} = \frac{-7+i+49i+7}{49+1} = \frac{50i}{50} = i$$

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_C} = \frac{-1+5i-(8+2i)}{7-i-(8+2i)} = \frac{-9+3i}{-1-3i} = \frac{(-9+3i)(-1+3i)}{(-1-3i)(-1+3i)} = \frac{9-27i-3i-9}{1+9} = \frac{-30i}{10} = -3i$$

$$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} : \frac{z_D - z_C}{z_B - z_C} = \frac{i}{-3i} = -\frac{1}{3}.$$

Conclusion
$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = i$ donc A, B et D sont non alignés.
De plus $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} : \frac{z_D - z_C}{z_B - z_C} \in \mathbb{R}^*$.
Donc les points A, B, C et D sont cocycliques.

5) Triangles particuliers et nombres complexes

Propriétés

A, B et C sont des points non alignés d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

- Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.
- Le triangle ABC est isocèle en A si et seulement si
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\alpha}$, avec $0 < \alpha < \pi$
- Le triangle ABC est rectangle et isocèle en A si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$ ou $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i$.
- Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

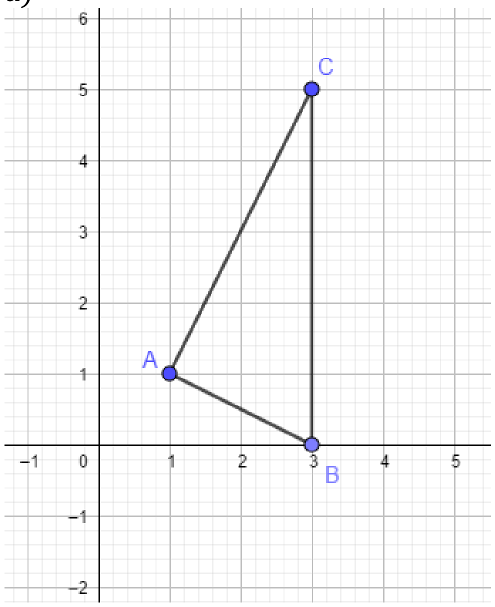
Exercice de fixation 1

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $1 + i$; 3 et $3 + 5i$.

a) Place les points A, B et C dans le repère (O, I, J).

b) Démontre que le triangle ABC est rectangle en A.

Solution

<table>
<tr>
<td>a)
</td>
<td>b) On a : $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_A$. Donc A≠ B et C≠ A.
Calculons : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$
$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{3-(1+i)}{3+5i-(1+i)}$
$= \frac{2-i}{2+4i}$
$= \frac{(2-i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)}$
$= \frac{4-8i-2i-4}{4+16}$
$= \frac{-10i}{20}$
$= -\frac{1}{2} i$.
$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R}^*$. Donc le triangle ABC est rectangle en A.</td>
</tr>
</table>

Exercice de fixation 2

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $-3+2i$; $-2-3i$ et $3-2i$
Démontre que le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

Solution

On a : $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_B$. Donc A≠ B et C≠ B.

Calculons : $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-3+2i+2+3i}{3-2i+2+3i} = \frac{-1+5i}{5+i} = \frac{(-1+5i)(5-i)}{(5+i)(5-i)} = \frac{-5+i+25i+5}{25+1} = i$$

$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = i$, donc le triangle est rectangle isocèle en B.

Exercice de fixation 3

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $-1+i\sqrt{3}$; 2 et $-1-i\sqrt{3}$.
Démontre que le triangle ABC est équilatéral.

Solution

On a : $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_B$. Les points A, B et C sont A≠ B et C≠ B.

Calculons : $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

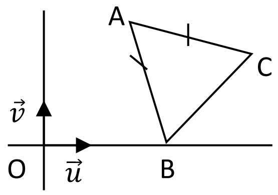
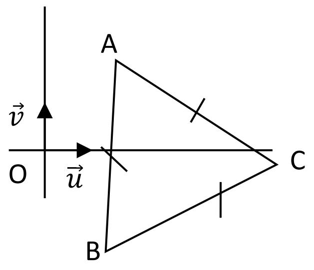
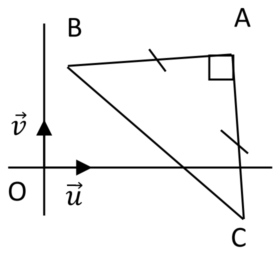
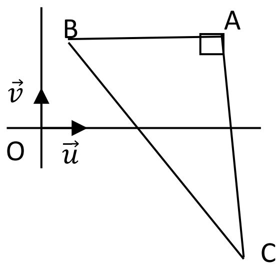
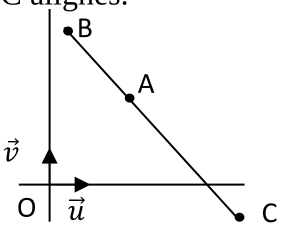
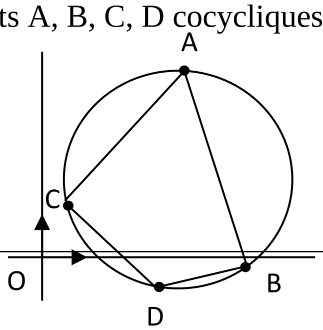
$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-1+i\sqrt{3}-2}{-1-i\sqrt{3}-2} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{-3-i\sqrt{3}} = \frac{(-3+i\sqrt{3})(-3+i\sqrt{3})}{9+3} = \frac{9-6i\sqrt{3}-3}{12} = \frac{6-6i\sqrt{3}}{12} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

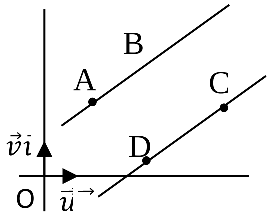
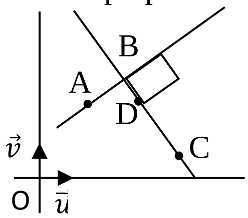
$= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}) = e^{-i\frac{\pi}{3}}$,

$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$, donc ABC est un triangle équilatéral.

<u>TABLEAU RECAPITULATIF</u>

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

Configurations	Caractérisations géométriques	Caractérisations complexes
Triangle ABC isocèle en A. 	AB = AC et $\text{mes}\widehat{A} = \alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$.	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\alpha}$
Triangle ABC équilatéral. 	AB = AC et $\text{mes}\widehat{A} = \frac{\pi}{3}$.	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
Triangle ABC rectangle et isocèle en A. 	AB = AC et $\text{mes}\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$.	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$
Triangle ABC rectangle en A. 	$\text{mes}\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = bi$, avec $b \in \mathbb{R}^*$
Points A, B, C alignés. 	$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$
Points A, B, C, D cocycliques 	$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) =$ $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}\right) + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$ et $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) \neq k\pi,$ $k \in \mathbb{Z}$	$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} : \frac{z_B - z_D}{z_A - z_D} \in \mathbb{R}^*$

Droites parallèles 	Il existe un nombre réel λ non nul tel que : $\overrightarrow{CD} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$. ou mes $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right) = k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$	$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$
Droites perpendiculaires 	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ ou mes $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$	$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} +$ $k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\,\mathbb{R}^*$

Exercice de fixation

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).
On donne les points A, B, C, D et K d'affixes respectives 2 + i, 2 - i, 5 - 2i, 5 + 2i et 4.
Justifie que :
1) les droites (AB) et (CD) sont parallèles ;
2) les droites (OK) et (DC) sont perpendiculaires

Solution

1) On a : $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \frac{5+2i-(5-2i)}{2-i-(2+i)} = \frac{4i}{-2i} = -2$. D'où : $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$;Par suite les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
2) On a : $\frac{z_D - z_C}{z_K - z_O} = \frac{5+2i-(5-2i)}{4-0} = \frac{4}{4}\,i = i$. D'où : $\frac{z_D - z_C}{z_K - z_O} \in i\,\mathbb{R}^*$. Par conséquent les droites (OK) et (DC) sont perpendiculaires.

III. TRANSFORMATIONS DU PLAN ET NOMBRES COMPLEXES

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{OJ}$).

- Une transformation du plan est une application bijective du plan dans le plan.
- Soit f une transformation du plan qui, à tout point M, associe le point M'.

L'application F de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui, à l'affixe z de M, associe l'affixe z' de M' s'appelle la transformation complexe associée à f .
L'application f s'appelle la transformation ponctuelle associée à F.
L'expression de z' en fonction de z s'appelle l'écriture complexe de f .

1- Définition d'une transformation du plan et d'écriture complexe

Définition
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

- Une transformation du plan est une application bijective du plan dans le plan.
- Soit F une transformation du plan qui à tout point M associe le point M'.

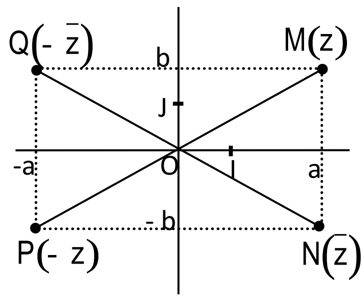
L'application bijective f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à l'affixe z de M, associe l'affixe z' de M' s'appelle la transformation complexe associée à F.
L'application F s'appelle la transformation ponctuelle associée à f.
L'expression de z' en fonction de z s'appelle l'écriture complexe de F.

2. Ecritures complexes de symétrie centrale de centre O et de symétries orthogonales d'axes (OI) et (OJ) dans le repère (O, I, J).

Propriété

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

- La symétrie orthogonale d'axe (OI) a pour écriture complexe : $z' = \bar{z}$.
- La symétrie centrale de centre O a pour écriture complexe : $z' = -z$.
- La symétrie orthogonale d'axe (OJ) a pour écriture complexe : $z' = -\bar{z}$.

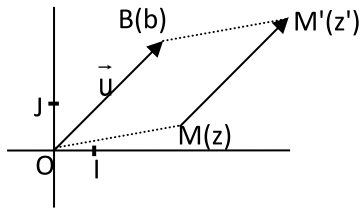


3. Ecriture complexe d'une translation, d'une homothétie et d'une rotation

- **Translation**

$t_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b, M et M' sont les points du plan d'affixes respectives z et z'.

On a : $M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.
$\Leftrightarrow z' - z = b$
$\Leftrightarrow z' = z + b$



La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b a pour écriture complexe : $z' = z + b$.

Exercice

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé.
On donne le vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1 - 2i$.
1) Donne l'écriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}$.
2) Détermine les affixes des images respectives A' et B' par t de chacun des points A et B, d'affixes respectives $3 - i$ et 5.

Solution

1) L'écriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1 - 2i$ est :
$z' = z + 1 - 2i$
2) Déterminons les affixes des images A' et B' respectives de A et de B par t.
$z_{A'} = z_A + 1 - 2i$
On a : $z_{A'} = 3 - i + 1 - 2i = 4 - 3i$
Donc $z_{A'} = 4 - 3i$

$z_{B'} = z_B + 1 - 2i$
On a : $z_{B'} = 5 + 1 - 2i = 6 - 2i$
Donc : $z_{B'} = 6 - 2i$

- **Homothétie de centre Ω et de rapport k, $k \in \mathbb{R}^*$**

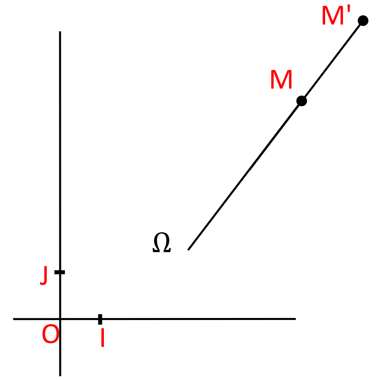
h est l'homothétie de centre Ω d'affixe Z_Ω et de rapport k, $k \in \mathbb{R}^*$.
M et M' sont les points du plan d'affixes respectives z et z'. On a :

$M' = h(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

$\Leftrightarrow Z' - Z_\Omega = k(Z - Z_\Omega)$

$\Leftrightarrow Z' = k(Z - Z_\Omega) + Z_\Omega$

L'homothétie de centre Ω d'affixe Z_Ω et de rapport k a pour écriture complexe : $Z' = k(Z - Z_\Omega) + Z_\Omega$



Exercice
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé.
Détermine l'écriture complexe associée à l'homothétie h de rapport – 2 et de centre Ω d'affixe $3 - i$.

Solution
L'écriture complexe associée à l'homothétie h de rapport -2 et de centre Ω d'affixe $3 - i$ est : $z' = -2\big(z - (3 - i)\big) + (3 - i)$.
Par suite : $z' = -2z + 9 - 3i$.

- **Rotation de centre Ω et d'angle θ, $\theta \in]-\pi, \pi]$**

r est la rotation de centre de centre Ω d'affixe Z_Ω et d'angle orienté de mesure principale θ.
• M et M' sont les points du plan d'affixes respectives z et z' tels que M est distinct de Ω. On a :

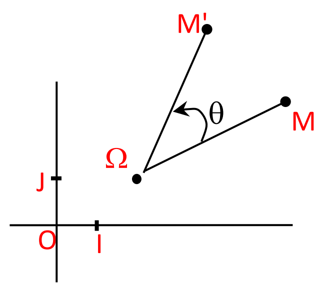
$$M' = r(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ Mes(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta \end{cases}$$

• $r(\Omega) = \Omega$

On a : $\dfrac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} = e^{i\theta}$

$z' = e^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$

La rotation de centre Ω d'affixe Z_Ω et d'angle orienté de mesure principale θ a pour écriture complexe :
$z' = e^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$



Exercice
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct. $(O ; \vec{u}, \vec{v})$
Trouve l'écriture complexe de la rotation r de centre Ω d'affixe $i\sqrt{3}$ et d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{3}$.

Solution

La rotation de centre Ω d'affixe Z_Ω et d'angle orienté de mesure principale θ a pour écriture complexe : $z' = e^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$
Or $z_\Omega = i\sqrt{3}$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$

Donc $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i\sqrt{3}) + i\sqrt{3}$

Comme $e^{i\frac{\pi}{3}} = cos\frac{\pi}{3} + i\ sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

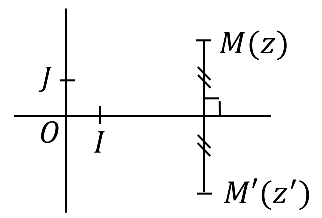
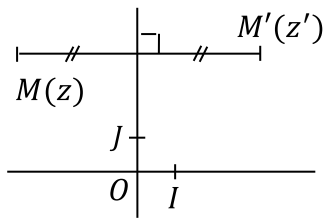
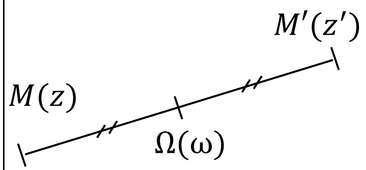
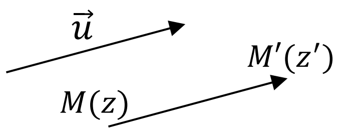
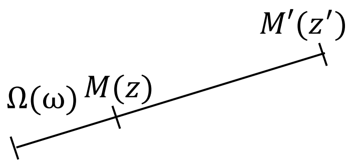
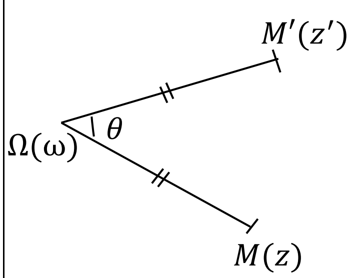
On a : $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z - i\sqrt{3}) + i\sqrt{3}$

$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - i\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\sqrt{3}$

Par suite : $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + i\sqrt{3}$

On en déduit que : $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Le tableau suivant donne des transformations du plan et leurs écritures complexes

Transformation du Plan	Image $M'(z')$ d'un point $M(z)$	Définition géométrique	Ecriture complexe
Symétrie orthogonale d'axe (OI)		La droite (OI) est la médiatrice du segment $[MM']$	$z' = \bar{z}$
Symétrie orthogonale d'axe (OJ)		La droite (OJ) est la médiatrice du segment $[MM']$	$z' = -\bar{z}$
Symétrie centrale de centre $\Omega(\omega)$		$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$	$z' - \omega = -(z - \omega)$
Translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b		$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' = z + b$
Homothétie de Centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k ($k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$)		$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	$z' - \omega = k(z - \omega)$
Rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ		$M \neq \Omega$ $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ mes(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta \end{cases}$	$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

Exercices de fixation

Exercice

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OJ})$.
Détermine l'écriture complexe de l'homothétie h de centre Ω d'affixe $-1-i$ et de rapport 3.

Solution

h étant l'homothétie de centre Ω d'affixe $-1-i$ et de rapport 3, son écriture complexe est : $z' - (-1-i) = 3(z-(-1-i))$.
Par suite, l'écriture complexe de l'homothétie h de centre $\Omega(-1-i)$ et de rapport 3 est :
$z' = 3z + 2 + 2i$.

4. Similitude plane directe

a- Ecriture complexe d'une similitude plane directe

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

1. Définition

Une similitude directe est une transformation du plan dont l'écriture complexe est de la forme : $z' = az + b$ où $a \in C^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Exemple :

Toute translation, toute homothétie et toute rotation est une similitude directe.

2. Propriété

Soit s une similitude directe d'écriture complexe : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.
* Si $a = 1$, alors s est la translation de vecteur d'affixe b.
* Si $a \neq 1$ alors s est la similitude directe de centre d'affixe $\frac{b}{1-a}$, de rapport $|a|$, d'angle $\mathrm{Arg}(a)$.

Remarque :

Pour déterminer l'affixe du centre de la similitude, on résout l'équation : $z \in \mathbb{C}$, $z = az + b$

<u>Vocabulaire</u>

Lorsque $a \neq 1$, la similitude directe est caractérisé par : son centre, son rapport et son angle.

Remarque

- Toute rotation de centre A et d'angle α est une similitude directe de centre A , de rapport 1 et d'angle α.
- Toute homothétie de centre A et de rapport $k\,(k > 0)$ est une similitude directe de centre A, de rapport k et d'angle nul.

•Toute homothétie de centre A et de rapport $k\,(k<0)$ est une similitude directe de centre A , de rapport $-k$ et d'angle π.

Exercice de fixation
Détermine les éléments caractéristiques de la similitude directe **S** dont l'écriture complexe est : $z' = (1-i)z + i$

<u>**Solution**</u>
L'écriture complexe de S est de la forme $z' = az + b$ *où* $a = 1 - i$, et $b = i$.
$a \neq 1$. Soit A le centre de **S**, k son rapport et θ son angle.
• L'affixe du centre A est $\frac{b}{1-a}$
$\frac{b}{1-a} = \frac{i}{1-(1-i)} = \frac{i}{i} = 1$
• Le rapport k est tel que : $k = |a|$
$k = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
• L'angle θ est tel que : $\theta = \operatorname{Arg}(a)$
On a : $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\theta = -\frac{\pi}{4}$
S est la similitude directe de centre A d'affixe 1, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

b- Reconnaitre une similitude directe définie par son écriture complexe

<u>**Propriétés**</u>
Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct, on considère la similitude directe S d'écriture complexe : $z' = az + b$ où $a \in C^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

TABLEAU RECAPITULATIF PERMETTANT DE PARTICULARISER UNE SIMILITUDE

	Conditions vérifiées par a		Nature et éléments caractéristiques de S
Similitude directe S d'écriture complexe $\boldsymbol{z' = az + b}$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.	Si $a \in \mathbb{R}^*$	$a = 1$	S est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b
		$a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$	S est l'homothétie de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et de rapport a.
	Si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$	$\lvert a\rvert = 1$	S est la rotation de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et d'angle Arg (a)
		$\lvert a\rvert \neq 1$	S est la similitude directe de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ de rapport $\lvert a\rvert$ de d'angle Arg (a)

<u>**Exercice de fixation**</u>
Détermine dans chaque cas, la nature et les éléments caractéristiques de la similitude directe S définie par son écriture complexe :
a) $z' = 5z + 2i$;
b) $z' = z + 1 + 3i$;
c) $z' = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$;
d) $z' = (-1 + i)z + 2$.

<u>**Solution**</u>
a) $a = 5$, dans ce cas $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, S est une homothétie de rapport 5.
Déterminons l'affixe z_0 de son centre.

$z_0 = \frac{2i}{1-5} = -\frac{1}{2}i$

Donc S est l'homothétie de centre le point d'affixe $-\frac{1}{2}i$ et de rapport 5

b) a = 1. Donc, S est la translation de vecteur d'affixe 1+3i

c) $a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, dans ce cas $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\ | = 1$, donc S est une rotation

Déterminons son angle

$\mathrm{Arg}(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{\pi}{3}$ car $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}$.

Son angle est $\frac{\pi}{3}$

Déterminons son centre

$\frac{b}{1-a} = \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

$= \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

$= 1$

Son centre a pour affixe 1.

D'où, S est la rotation de centre le point d'affixe 1 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

d) a = -1 + i, dans ce cas $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$|-1+i| = \sqrt{2}$, $|-1+i| \neq 1$ donc S est une similitude directe

$\mathrm{Arg}(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$ car $-1 + i = cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4}$

L'angle de S est $\frac{3\pi}{4}$

$\frac{b}{1-a} = \frac{2}{1-(-1+i)}$

$= \frac{2}{2-i}$

$= \frac{2(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{4 + 2i)}{4 + 1} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$

D'où, S est la similitude directe de centre le point d'affixe $\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

c- Détermination de l'écriture complexe d'une similitude directe donnée par son centre, son rapport et son angle.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

<u>Propriété</u>

Soit M' un point du plan d'affixe z' qui est l'image d'un point M d'affixe z par une similitude directe S de centre Ω d'affixe z_Ω, de rapport k et d'angle θ.

On a : $z' = ke^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$.

<u>Exercice de fixation</u>

Détermine l'écriture complexe de la similitude directe de centre le point A d'affixe i, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

<u>Solution</u>

La forme générale de l' écriture complexe de S est : z' = $ke^{i\theta}(z - z_A) + z_A$

z' = $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$(z- z_A) + z_A

$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(z - i) + i$

$= (1 + i)(z - i) + i$

$= (1 + i)z + 1.$

Donc l'écriture complexe de S est : z'= $(1 + i)z + 1$.

d. Construction de l'image d'un point par une similitude directe définie par son centre, son rapport et son angle.

__Propriété__

Soit s une similitude plane directe de centre A ,de rapport k et d'angle θ(θ∈$]-\pi;\pi[$).

Pour tout point M du plan distinct de A, s(M) = M' $\Leftrightarrow \begin{cases} AM' = kAM \\ Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}}\right) \end{cases}$

__Conséquence__

Toute similitude directe $s_{(A,k,\theta)}$ de centre A, de rapport k et d'angle de mesure θ, s'écrit de façon unique sous la forme :

$s_{(A;k;\theta)} = r_{(A;\theta)} \circ h_{(A;k)} = h_{(A;k)} \circ r_{(A;\theta)}$.

* $h_{(A;k)}$ est l'homothétie de centre A et de rapport k
* $r_{(A;\theta)}$ est la rotation de centre A et d'angle de mesure θ.

__Vocabulaire__:

L'écriture: $s_{(A;k;\theta)} = r_{(A;\theta)} \circ h_{(A;k)} = h_{(A;k)} \circ r_{(A;\theta)}$ s'appelle la décomposition canonique de la similitude directe $s_{(A;k;\theta)}$

Exercice de fixation 1

Ecris la décomposition canonique de $s_{(A;2;\frac{3\pi}{2})}$

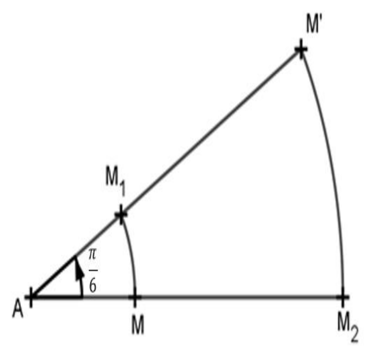
Solution

$s_{(A;2;\frac{3\pi}{2})} = r_{(A;\frac{3\pi}{2})} \circ h_{(A;2)} = h_{(A;2)} \circ r_{(A;\frac{3\pi}{2})}$.

__Exercice de fixation 2__ :

Construis l'image M' d'un point M par la similitude directe S de centre A, de rapport 3 et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

Solution

$s_{(A;3;\frac{\pi}{6})} = h_{(A;3)} \circ r_{(A;\frac{\pi}{6})} = r_{(A;\frac{\pi}{6})} \circ h_{(A;3)}$ • $s_{(A;3;\frac{\pi}{6})} = h_{(A;3)} \circ r_{(A;\frac{\pi}{6})}$. $M \longmapsto^{r} M_1 \longmapsto^{h} M'$ • $s_{(A;3;\frac{\pi}{6})} = r_{(A;\frac{\pi}{6})} \circ h_{(A;3)}$ $M \longmapsto^{h} M_2 \longmapsto^{r} M'$	

e. Similitude directe définie par deux points distincts et leurs images

Propriété
Soit A, B, C et D quatre points du plan tels que : $A \neq B$ et $C \neq D$.
Il existe une unique similitude directe qui transforme A en C et B en D.

Conséquence
Soit A, B et C trois points du plan tels que : $A \neq B$ et $B \neq C$.
Il existe une unique similitude directe qui transforme A en B et B en C

Exercice de fixation
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct.
On donne les points A(2), B(2+2i), C(1-3i) et D(-4i).
a) Trouve l'écriture complexe de la similitude directe s telle que : s(A) = C et s(B) = D.
b) Détermine les éléments caractéristiques de S.

Solution
a) Soit : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, l'écriture complexe de S.

$$\begin{cases} s(A) = C \\ s(B) = D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} az_A + b = z_C \\ az_B + b = z_D \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 1 - 3i \\ (2 + 2i)a + b = -4i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 1 - 3i \\ (-2 - 2i)a - b = 4i \end{cases}$$

$$-2ia = 1+i$$

$$a = \frac{1+i}{-2i} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

La $1^{ère}$ équation du système donne :

$$b = 1 - 3i - 2a = 1 - 3i - 2(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)$$

$$b = 2 - 4i$$

L'écriture complexe de s est : $z' = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)z + 2 - 4i$

b) Notons k le rapport de S, θ son angle et Ω son centre :

* $k = |-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i| = \frac{\sqrt{2}}{2}$
* $\theta = \text{Arg}(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) = \frac{3\pi}{4}$
* $z_\Omega = \frac{2-4i}{1-(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2})} = \frac{2-2i}{1-(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2})} = 2 - 2i$

Donc, S est la similitude directe de centre $\Omega(2-2i)$, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

Cas particulier : Similitude directe définie par son centre, un point et son image

Propriété
Soit A, B et C trois points du plan tels que : $A \neq B$ et $A \neq C$.
Il existe une unique similitude directe de centre A qui transforme B en C.

Exercice de fixation
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on donne les points A(-2+i), B(1+2i) et C(2-i).
On considère la similitude directe S de centre A telle que : S(B) = C.
a) Trouve l'écriture complexe de S.
b) Détermine les éléments caractéristiques de S

SOLUTION
a) L'écriture complexe de s est de la forme : z' = az + b où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} s(A) = A \\ s(B) = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} az_A + b = z_A \\ az_B + b = z_C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-2+i)a + b = -2+i & (L_1) \\ (1+2i)a + b = 2-i & (L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-2+i)a + b = -2+i & (L_1) \\ (-1-2i)a - b = -2+i & -1 \times (L_2) \end{cases}$$

$(L_1) - (L_2) \Leftrightarrow (-3-i)a = -4+2i$
$a = \frac{-4+2i}{-3-i}$
a = 1 - i
(L_1) donne : b = -2 + i - (-2+i)a
b = -2 + i - (-2+i)(1 - i) = -1 - 2i
Donc, S : z' = (1 - i)z - 1 - 2i

b) S a un centre, donc S n'est pas une translation.
a = 1 – i, $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ donc S n'est pas une homothétie.
$|1 - i| = \sqrt{2}$, $|a| \neq 1$ donc S n'est pas une rotation.
D'où S est la similitude directe de centre A de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle Arg(1 - i)
Soit θ l'argument principal 1-i.

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$$

Conclusion : S est la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$

f. Images de figures simples par une similitude directe

Propriété 1
Toute similitude directe de rapport k transforme :
• une droite en une droite ;
• une demi-droite en une demi-droite ;
• un segment de longueur ℓ en un segment de longueur $k\ell$;
• un cercle de centre A et de rayon r en un cercle de centre A', image de A par la similitude directe, et de rayon kr.

Propriété 2

Toute similitude directe de rapport k multiplie :
• les distances par k ;
• les aires par k^2

Exercice de fixation

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).
On donne la similitude directe S dont l'écriture complexe est : z' = (1 + i)z - 1 - 2i
a) Calcule l'aire a_1 de l'image du triangle OIJ par S.
b) Trouve l'image (C_2) par S du cercle (C_1) de centre O et de rayon 2.
c) Détermine l'image de la droite (OI) par S.

Solution

a) Le rapport de la similitude S est $\sqrt{2}$. Le triangle OIJ a pour aire $\frac{1}{2}$ ua.
Donc l'aire a_1 de l'image du triangle OIJ est : $\left(\sqrt{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{2}$ ua, soit 1ua.
b) Soit O' l'image de O par S. On a : $z_{O'} = -1 - 2i$.
(C_2) est le cercle de O' et de rayon $2\sqrt{2}$.
c) Soit I' l'image de I par S. On a : $z_{I'} = -i$.
L'image de la droite (OI) par S est la droite (O'I').

C- SITUATION COMPLEXE

Situation complexe 1

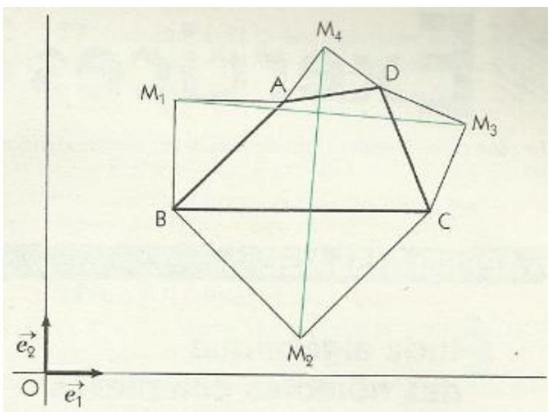
Lors de la préparation d'un exposé en géométrie, un groupe d'élèves d'une classe de terminale découvre l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}$, $2z^2 + 2z + 1 = 0$.
Ils veulent avoir des informations sur cette équation.
Après réflexion, un élève de ce groupe affirme que si l'on note a une solution de (E) dont la partie imaginaire est positive, les nombres a, a^2et a^3 seront les affixes des sommets d'un triangle équilatéral. Sa voisine de classe ne partage pas cet avis.
Ayant suivi la discussion, tu décides de les départager.
Dis, en argumentant, lequel des deux élèves a raison.

Solution

Les solutions de $2z^2 + 2z + 1 = 0$ sont : $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ et $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, les nombres a, a^2et a^3 seront les affixes des sommets d'un triangle équilatéral si $\frac{a^3-a}{a^2-a} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou si $\frac{a^3-a}{a^2-a} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ or $\frac{a^3-a}{a^2-a} = a + 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ donc le triangle n'est pas équilatéral

Situation complexe 2

Des élèves d'un lycée ont décoré avec différentes figures géométriques les murs de la salle du club de Mathématiques.
La figure ci-contre représentant l'une d'elles est constituée d'un quadrilatère ABCD de sens direct et des triangles rectangles isocèles AM_1B, BM_2C,



CM_3D et DM_4A de sommets respectifs M_1, M_2, M_3 et M_4.
Observant attentivement cette figure, l'un des élèves de la promotion de Terminale, passionné de nombres complexes et de géométrie, affirme que les segments $[M_1M_3]$ et $[M_2M_4]$ ont des supports perpendiculaires et ont la même longueur.
Démontre en utilisant les nombres complexes que l'affirmation de cet élève est correcte.

Solution

- Pour résoudre ce problème, on va utiliser les nombres complexes appliqués à la géométrie.
- Pour cela, désignons par z_A, z_B, z_C et z_D, les affixes respectifs des points A,B,C et D ; $z_1, z_2, z_3,$ et z_4 les affixes respectifs des points M_1, M_2, M_3 et M_4.

Le triangle AM_1B est rectangle isocèle en $M_1 \Leftrightarrow \frac{z_B - z_1}{z_A - z_1} = i$ (car le triangle AM_1B est directe).

$$\Leftrightarrow \quad z_1 = \frac{z_B - iz_A}{1-i}$$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 = \frac{(z_B - iz_A)(1+i)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 = \frac{z_A\times(1-i) + z_B\times(1+i)}{2}.$$

De même, on montre que les triangles BM_2C, CM_3D, DM_4A sont rectangles si et seulement si on a respectivement :

$$z_2 = \frac{z_B\times(1-i) + z_C\times(1+i)}{2}, \quad z_3 = \frac{z_C\times(1-i) + z_D\times(1+i)}{2} \quad \text{et} \quad z_4 = \frac{z_D\times(1-i) + z_A\times(1+i)}{2}.$$

Il reste à calculer : $\frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_1}$

$$\frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{\frac{z_D\times(1-i) + z_A\times(1+i)}{2} - \frac{z_B\times(1-i) + z_C\times(1+i)}{2}}{\frac{z_C\times(1-i) + z_D\times(1+i)}{2} - \frac{z_A\times(1-i) + z_B\times(1+i)}{2}}$$

$$= \frac{(1-i)(z_D - z_B) + (1+i)(z_A - z_C)}{(1-i)(z_C - z_A) + (1+i)(z_D - z_B)}$$ et par multiplication par le conjugué

(1 + i) de (1 – i) $$= \frac{2\times(z_D - z_B) + 2i\times(z_A - z_C)}{2\times(z_C - z_A) + 2i\times(z_D - z_B)}$$

$$= \frac{[(z_D - z_B) + i\times(z_A - z_C)]}{i\times[(z_D - z_B) + i\times(z_A - z_C)]} = -i.$$

les segments $[M_1M_3]$ et $[M_2M_4]$ ont des supports perpendiculaires et puisque $|z_4 - z_2| = |z_4 - z_2|$ ces segments sont de même longueur.

Exercices de maison

Exercice 1

On donne le point A d'affixe $2+2i$.

a) Détermine l'écriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}$ d'affixe 1-3i.

b) Détermine l'écriture complexe de l'homothétie h de centre A et de rapport -3.

c) Détermine l'écriture complexe de la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 2

Détermine les éléments caractéristiques de la similitude directe **S** dont l'écriture complexe est : $z' = (1 + i\sqrt{3})z + 2i\sqrt{3}$.

Exercice 3

Détermine dans chaque cas, la nature et les éléments caractéristiques de la similitude directe s définie par son écriture complexe :

a) z' = -3z +1- i ;

b) z' = z + i ;

c) $z' = (\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i)z + \frac{1}{2}i$;

d) z' = (2-2i)z.

e) z' = -z + i

Exercice 4

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

a) Détermine l'écriture complexe de la similitude directe de centre le point A d'affixe 1- i, de rapport 3 et d'angle $\frac{-3\pi}{4}$.

b) Détermine l'écriture complexe de la similitude directe de centre le point B d'affixe $i\sqrt{3}$, de rapport 4 et d'angle $\frac{-2\pi}{3}$.

c) Détermine l'écriture complexe de la similitude directe de centre le point O, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{5\pi}{6}$.

D- EXERCICES

Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
On donne les points A, B, C, D d'affixes respectives $2 + i$, $2 - i$, $5 - 2i$, $5 + 2i$.
Justifie que : les points A, B, C et D sont cocycliques.

Solution

On a : $\frac{z_D - z_C}{z_D - z_A} : \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \frac{4i}{3+i} : \frac{-3+i}{-2i} = \frac{-2}{5}$.
D'où : $\frac{z_D - z_C}{z_D - z_A} : \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$.
Par suite les points A, B, C et D sont cocycliques.

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
1) Détermine l'écriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1 + 4i$.
2) Détermine l'écriture complexe de la rotation r de centre A d'affixe $1 + i$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Solution

1) L'écriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}$ est : $z' = z + z_{\vec{u}}$. Or $z_{\vec{u}} = 1+4i$.
L'écriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}$ est : $z' = z + 1 + 4i$.

2) L'écriture complexe de la rotation r de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est :

$$z' - (1+i) = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - (1+i))$$

$$z' = (\frac{-1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2})(z - (1+i)) + 1 + i$$

$$z' = \left(\frac{-1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + \frac{3+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

L'écriture complexe de la rotation r de centre A d'affixe $1+i$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est :

$$z' = \left(\frac{-1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + \frac{3+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice de renforcement

Exercice 3

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

Dans chaque cas, détermine et construis l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la condition donnée :

a) $|z - 2i| = 3$.

b) $|z - 1 + i| = |z + 1 + 3i|$.

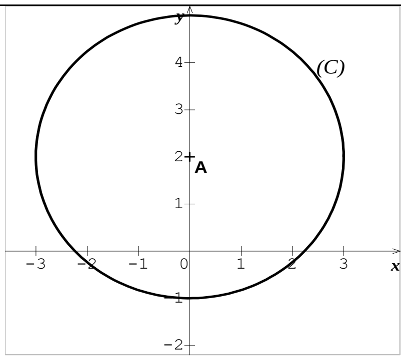
c) $\arg(z - 1 - i) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

Solution

a) $|z - 2i| = 3 \Leftrightarrow$ AM = 3 où A est le point d'affixe 2i.

L'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :

$|z - 2i| = 3$ est le cercle (C) de centre A de rayon 3.



b)

$|z - 1 + i| = |z + 1 + 3i|$

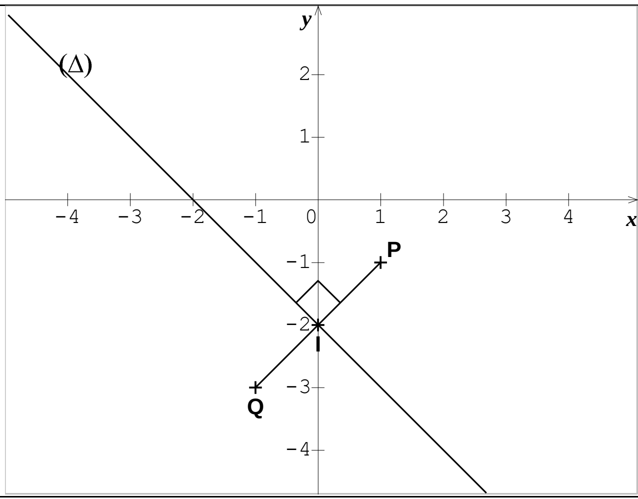
$\Leftrightarrow |z - (1 - i)| =$

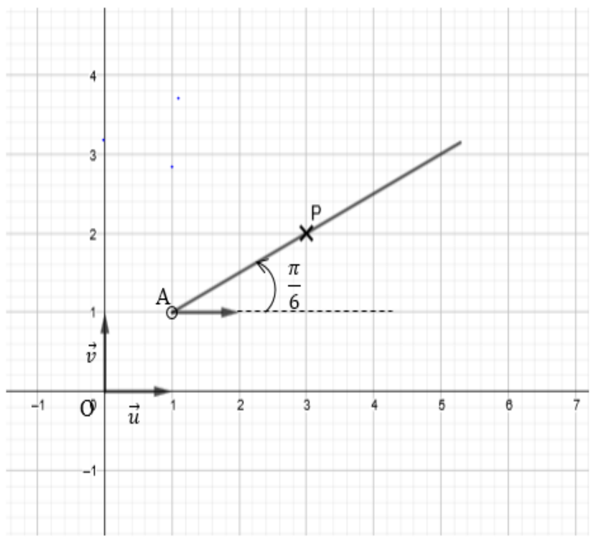
$|z - (-1 - 3i)|$

$\Leftrightarrow$ PM = QM où P et Q sont les points d'affixes respectives $1 - i$ et $-1 - 3i$.

L'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :

$|z - 1 + i| = |z + 1 + 3i|$ est la médiatrice (Δ) du segment [PQ].



c) $\arg(z-1-i) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ $\Leftrightarrow \arg(z-(1+i)) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ $\Leftrightarrow \arg(z-z_A) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$, où $A(1+i)$ $\Leftrightarrow \text{Mes}\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AM}}\right) = \frac{\pi}{6}$ L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $\arg(z-1-i) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ est la demi-droite [AP) privée du point A, où $\text{Mes}\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AP}}\right) = \frac{\pi}{6}$.	

3. Exercices d'approfondissement

Exercice 4

1) a) Résous dans C l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.

Précise le module et un argument de chacune des solutions.

b) Déduis les solutions de l'équation : $(-iz+3i+3)^2 - 2(-iz+3i+3) + 2 = 0$

2) le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2cm,

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1+i, z_B = \overline{z_A}$, $z_C = 2z_B$

a) Détermine les formes algébriques de z_A, z_B et z_C

b) Place les points A, B et C

c) Montre que les points A, B et C appartiennent au cercle (C) de centre I d'affixe 3 et de rayon $\sqrt{5}$

d) Calcule $\frac{z_C - 3}{z_A - 3}$; en déduire la nature du triangle IAC.

Solution

1) a) $z^2 - 2z + 2 = 0$. Utilisons (une fois quand même la forme canonique !)

$z^2 - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 - 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 = -1 = i^2 \Leftrightarrow z - 1 = i$ ou $z - 1 = -i \Leftrightarrow z = 1+i$ ou $z = 1-i$;
$S_C = \{1+i ; 1-i\}$

$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; $|1+i| = \sqrt{2}$ et $\text{ARG}(1+i) = \frac{\pi}{4}$.

On montre de même que : $|1-i| = \sqrt{2}$ et $\text{ARG}(1-i) = -\frac{\pi}{4}$

b) En posant $Z=-iz+3i+3$, l'équation dévient : $Z^2-2Z+2=0$ donc les solutions sont d'après la première question, Z = 1 + i ou Z = 1 – i. Donc $-iz+3i+3=1+i$ ou $-iz+3i+3=1-i$; $z=2-2i$ ou $z=4-2i$; $S_C=\{2-2i\,;4-2i\}$

2°/ a) $z_A=1+i, z_B=1-i,\ z_C=2-2i$;

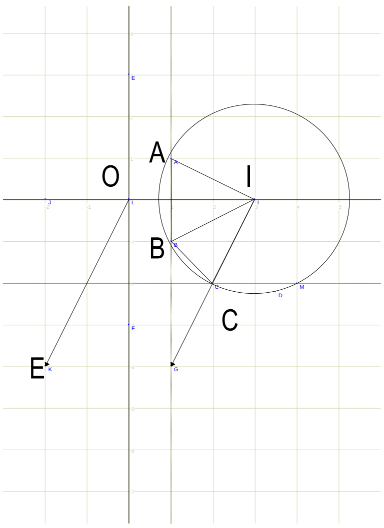
b) Figure

c) Il suffit de montrer que $IA=IB=IC=\sqrt{5}$

$IA=\left|z_{\overrightarrow{IA}}\right|=|1+i-3|=|-2+i|=\sqrt{5}$; $IB=\left|z_{\overrightarrow{IB}}\right|=|1-i-3|=|-2-i|=\sqrt{5}$

$IC=\left|z_{\overrightarrow{IC}}\right|=|2-2i-3|=|-1-2i|=\sqrt{5}$

d) $\dfrac{z_C-3}{z_A-3}=i$; le triangle IAC est rectangle et isocèle en I.



Exercice 5

Exercice 5

Le plan complexe est muni du repère orthonormé (O, I, J).
A, B et D sont les points d'affixes respectives $-1+3i$; -2 et $2+2i$.
Soit r la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre le point J d'affixe i.

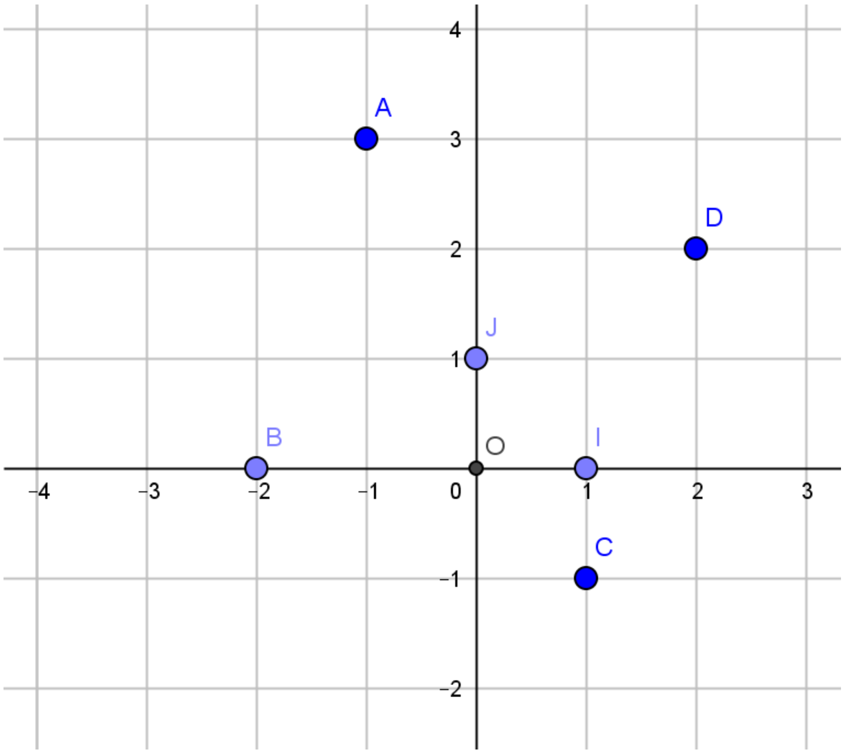
1- a) Fais une figure.
b) Démontre que l'écriture complexe de r est : $z' = i\,z + 1 + i$

2- a) Justifie que B est l'image du point A par la rotation r.
b) Justifie que D est l'antécédent du point A par r.

3- Soit C l'image du point A par la symétrie centrale de centre J.
a) Calcule l'affixe du point C.
b) Démontre que le quadrilatère ABCD est un carré.

Solution

1- a)



b) écriture complexe de r

L'écriture complexe d'une rotation est de la forme : $z' = e^{i\alpha}(z - \omega) + \omega$ où α est l'angle de la rotation et , l'affixe du centre de cette rotation. on en déduit que :

$z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - i) + i = iz + 1 + i$ est l'écriture complexe associé à cette rotation.

2) a- Soit z'_A, l'affixe de l'image de A par la rotation r ; $z'_A = i \times (-1 + 3i) + 1 + i = -2 = z_B$.

b- cela revient à résoudre l'équation :z $\in\mathbb{C}$, $-1 + 3i = iz + 1 + i$. On obtient : $z = \frac{-2+2i}{i} = 2 + 2i = z_D$.

3) a- calcule de l'affixe de C

$$z_J = \frac{z_A + z_C}{2} \Leftrightarrow z_C = 2 \times z_J - z_A = 2 \times i - (-1 + 3i) = 1 - i.$$

b- démontrons que ABCD est un carré.

Il suffit pour cela de montrer que ABCD est un losange ayant deux cotés consécutifs perpendiculaires.

- $|z_B - z_A| = |z_B - z_C| = |z_C - z_D| = |z_D - z_A|$, donc AB = BC = CD =DA.
- $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-2-(-1+3i)}{1 - i - (-1+3i)} = \frac{-1-3i}{2-4i} = \frac{(-1-3i)(2+4i)}{20} = \frac{-2-4i-6i+12}{20} = \frac{10-10i}{20} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ donc $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}}\right) = arg\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{\pi}{4}$et puisque $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}}\right) = 2 \times Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}}\right) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ $d'où\ le\ résultat.$

Terminale D

Mathématiques

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

THEME : FONCTIONS NUMERIQUES

Durée : 14 heures **Code :**

Leçon 12 : SUITES NUMERIQUES

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Dans le souci d'avoir assez de revenus pour l'organisation des festivités de fin d'année, le président de la promotion terminale veut effectuer le placement de la somme de 300.000 Francs CFA que la promotion a dans sa caisse au premier Janvier 2021.

Il se rend dans une structure bancaire et le banquier lui propose deux options.

Option 1 : le capital placé est augmenté de 2500 Francs CFA à intérêts simples par mois.

Option 2 : le capital placé augmentera de 5% de mois en mois pendant la durée du placement.

Le budget de la manifestation étant de 400.000 Francs CFA, le président voudrait connaitre l'option la plus avantageuse pour obtenir rapidement cette somme avant la date de la manifestation fixée au début du mois d'août 2022.

Le président veut savoir laquelle des deux options est plus avantageuse.

Les élèves de terminale décident d'aider le président à faire le meilleur placement.

B. CONTENU DU COURS

1. Rappel sur les suites arithmétiques et les suites géométriques

Nature de la suite	Suite arithmétique	Suite géométrique
Définition	$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}, \quad r \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = qu_n \end{cases} ; q \in \mathbb{R}$
Raison	r	q
Caractérisation par une formule explicite	•$u_n = n\,r + u_0$ • Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, $u_n = (n - p)r + u_p$	•$v_{n+1} = q^n v_0$ • Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, $v_n = v_p q^{n-p}$

Somme des termes consécutifs	$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$.	si $q \neq 1$ $alors$ $v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
	$u_p + \cdots + u_n = (n-p+1)\frac{u_p+u_n}{2}$ où n et p sont des entiers naturels tels que $n \geq p$	Si $q \neq 1$ $alors$ $v_p + \cdots + v_n = v_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$ où n et p sont des entiers naturels tels que $n \geq p$

<u>Exercices de fixation</u>

<u>Exercice 1</u>

1) (u) est une suite arithmétique de raison -3. Détermine une relation entre u_{n+1} et u_n.
2) (v) est une suite géométrique de raison -3. Détermine une relation entre v_{n+1} et v_n .

Solution

1)$u_{n+1} = u_n - 3$
2) $v_{n+1} = -3v_n$

<u>Exercice 2</u>

1) (u) est une suite arithmétique de raison 2 et $u_3 = -5$. Exprime u_n en fonction de n.
2) (v) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{2}$ et $v_4 = 16$. Exprime v_n en fonction de n.

Solution

1) $u_n = (n-3)r + u_3$
$u_n = 2(n-3) - 5$;
soit : $u_n = 2n - 11$.

2) $v_n = v_4 \times q^{n-4}$
$v_n = 16 \times (-\frac{3}{2})^{n-4}$.

<u>Exercice 3</u>

1. (u) est une suite arithmétique de raison -3 et $u_2 = 7$.
   Calcule la somme : $u_0 + u_1 + \cdots + u_{20}$
2. (v) est une suite géométrique de raison -2 et $v_4 = 16$.
   Calcule la somme : $v_2 + v_3 + \cdots + v_{21}$

Solution

1. $u_0 + u_1 + \cdots + u_{20} = (20 - 0 + 1)\left(\frac{u_0+u_{20}}{2}\right)$

On a : $u_n = (n-2)r + u_2 = -3(n-2) + 7$; soit : $u_n = -3n + 13$; donc, $u_0 = 13$ et $u_{20} = -47$.
Par suite : $u_0 + u_1 + \cdots + u_{20} = (20 - 0 + 1)\left(\frac{u_0+u_{20}}{2}\right)$

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{20} = 21(\frac{13-47}{2})$$

Donc : $u_0 + u_1 + \cdots + u_{20} = 21 \times (-17) = -357$

2. $v_2 + v_3 + \cdots + v_{21} = v_2(\frac{1-q^{21-2+1}}{1-q})$

On a : $v_n = v_4 \times q^{n-4} = 16 \times (-2)^{n-4}$; donc : $v_2 = 16 \times (-2)^{2-4} = 16 \times (-\frac{1}{2})^2$; soit $v_2 = 4$.

Par suite : $v_2 + v_3 + \cdots + v_{21} = 4\left(\frac{1-(-2)^{20}}{1+2}\right) = \frac{4}{3}(1-(2)^{20})$.

2. Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence s'applique aux propositions dont l'énoncé dépend d'un entier naturel n.

<u>Méthode</u>

Pour démontrer qu'une proposition dépendant d'un entier naturel n est vraie pour tout $n \geq n_0$ (n_0 étant un entier naturel donné), on procède en trois étapes :

• On vérifie que la proposition est vraie lorsque $n = n_0$. (Initialisation)

• On suppose que la proposition est vraie pour un entier $k \geq n_0$ et on démontre qu'elle est vraie pour l'entier suivant $k+1$. (Hérédité)

• On conclut que la proposition est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$. (Conclusion)

<u>Exercice de fixation</u>

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$.

Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 6$.

Solution :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Notons la proposition : ≪ $u_n < 6$ ≫.

- Vérifions que la proposition est vraie au rang 0, c'est-à-dire que : $u_0 < 6$.
  On a : $u_0 = -1$. Alors $u_0 < 6$. Donc est vraie la proposition est vraie au rang la proposition est vraie au rang la proposition est vraie au rang 0.
- Soit k un entier naturel tel que $k \geq 0$.
  Supposons que la proposition soit vraie au rang k c'est-à-dire que : $u_k < 6$, démontrons que la proposition est vraie au rang k+1 c'est-à-dire que : $u_{k+1} < 6$.

D'après l'hypothèse de récurrence ci-dessus, $u_k < 6$.

On en déduit que : $\frac{1}{2}u_k < 3$,

$\frac{1}{2}u_k + 3 < 3 + 3$;soit $\frac{1}{2}u_k + 3 < 6$, c'est-à-dire : $u_{k+1} < 6$.

D'où la proposition est vraie au rang k+1 est vraie.

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 6$.

3. Suites croissantes, suites décroissantes

<u>Définitions</u>

Soit (u_n) une suite de nombres réels et E son ensemble de définition. On dit que :

- la suite (u_n) est croissante, lorsque pour tout entier naturel n de E, $u_n \leq u_{n+1}$.
- la suite (u_n) est décroissante, lorsque pour tout entier naturel n de E, $u_n \geq u_{n+1}$.
- la suite (u_n) est strictement croissante, lorsque pour tout entier naturel n de E, $u_n < u_{n+1}$.
- la suite (u_n) est strictement décroissante, lorsque pour tout entier naturel n de E, $u_n > u_{n+1}$.
- la suite (u_n) est constante, lorsque pour tout entier naturel n de E, $u_n = u_{n+1}$.

- la suite (u_n) est monotone, lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante.

<u>Méthode</u>
Pour étudier le sens de variation d'une suite numérique (u_n) définie sur une partie E de $\mathbb{N}$, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

a) La méthode algébrique

- On étudie le signe de : $u_{n+1} - u_n$
  - Si pour tout n de E,$u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors la suite (u_n) est croissante.
  - Si pour tout n de E, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors la suite (u_n) est décroissante.

- On compare le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 si pour tout entier naturel n de E, $u_n > 0$.
  - Si pour tout n de E, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la suite (u_n) est croissante.
  - Si pour tout n de E, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.

b) La méthode à l'aide d'une fonction
Si $u_n = f(n)$, alors (u_n) a le même sens de variation que la fonction f.
On étudie donc les variations de la fonction f sur I contenant E.
  - Si f est croissante sur I, alors la suite (u_n) est croissante.
  - Si f est décroissante sur I, alors la suite (u_n) est décroissante.

c) Utilisation du raisonnement par récurrence

<u>Exercices de fixation</u>

<u>Exercice 1</u>
Soit la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_n = n^2 + 3n$. Démontre que la suite (w_n) est croissante.

Solution
Pour tout entier naturel n, $w_{n+1} - w_n = (n+1)^2 + 3(n+1) - (n^2 + 3n)$
$w_{n+1} - w_n = 2n + 4$; donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n > 0$.
Par suite, la suite (w_n) estcroissante.

<u>Exercice 2</u>
Soit la suite(v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = e^{-2n+1}$.
Démontre que la suite (v_n) est décroissante.

Solution
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$. Calculons : $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.
On a : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{e^{-2n-1}}{e^{-2n+1}} = e^{-2}$, or $e^{-2} < 1$ donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$.
Donc la suite (v_n) est décroissante.

4. Suites majorées, minorées, bornées

<u>Définitions</u>
Soit (u_n) une suite de nombre réels et E son ensemble de définition. On dit que :
• La suite (u_n) est *majorée*, s'il existe un nombre réel M tel que pour tout entier naturel n de E, $u_n \leq M$.
• La suite (u_n) est *minorée*, s'il existe un nombre réel m tel que pour tout entier naturel n de E, $u_n \geq m$.

• La suite (u_n) est *bornée*, si elle est à la fois *majorée* et *minorée*.

Remarque : On peut utiliser un raisonnement par récurrence pour démontrer qu'une suite est soit minorée, soit majorée, soit bornée

.Exercice de fixation
Soit (u_n) une suite de nombres réels.
Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

N°	Affirmations	Réponses
1	Si pour tout entier naturel n, $u_n < -3$, alors la suite (u_n) est minorée par -3	
2	S'il existe un entier naturel n, tel que $u_n \geq 0$, alors la suite (u_n) est minorée par 0	
3	Si pour tout entier naturel n, $u_n \geq 2$, alors la suite (u_n) est majorée par 2	
4	Si pour tout entier naturel n, $\|u_n\| < 1$, alors la suite (u_n) est bornée	

Solution
1. Faux 2. Faux 3. Faux 4. Vrai

5. Convergence d'une suite numérique

a. Définition
- On dit qu'une suite (u_n) est convergente lorsqu'elle admet une limite finie.
- Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Propriété

- Si une suite numérique admet une limite, alors cette limite est unique.
- Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, ($l \in \mathbb{R}$ ou l est infini) alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.

Exercices de fixation

Exercice 1
Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

N°	Affirmations	Réponses
1	La suite de terme général $\sqrt{n}$ est convergente.	
2	La suite de terme général $\frac{1}{n^3}$ est convergente.	
3	La suite de terme général cos(*n*) est convergente	

Solution

1. Faux 2. Vrai 3. Faux

Exercice 2
Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \frac{3n^2 - 2n + 1}{n^3}$.
Calcule la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Solution

Soit f la fonction définie sur $[1;\ +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3x^2-2x+1}{x^3}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = f(n)$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2x+1}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0.$ Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.$

b. Limites de référence

<u>Propriété</u>

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$, $(\alpha \in \mathbb{R}_+^*)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$, $(\alpha \in \mathbb{R}_+^*)$.

Remarque :

Les propriétés concernant les limites de la somme, du produit ou du quotient de deux fonctions numériques à variables réelles demeurent applicables aux limites de la somme, du produit ou du quotient de deux suites numériques.

<u>Exercice de fixation</u>

Détermine la limite de la suite (u_n) de terme général u_n dans chacun des cas suivants :

1) $u_n = \frac{\ln(n+1)}{n}$ 2) $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$

Solution

1) On a : $\frac{\ln(n+1)}{n} = \frac{\ln(n+1)}{n+1} \times \frac{n+1}{n}$.

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$. Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2) On a : $\sqrt{n^2+1} - n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$.

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0$.

c. Propriétés : convergences des suites monotones

- Toute suite décroissante et minorée est convergente.
- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.
- Toute suite croissante et non majorée diverge en $+\infty$.

<u>Exercice de fixation</u>

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

N°	Affirmations	Réponses
1	Toute suite décroissante et à termes positifs est convergente.	
2	Toute suite croissante et non majorée est convergente.	
3	Toute suite croissante est nécessairement convergente	
4	Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.	

Solution

1. Vrai 2. Faux 3. Faux 4. Vrai

Remarque : Euler a démontré que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$.

6. Compléments sur les limites de suites numériques

a. Croissances comparées des suites (a^n), (n^α) et $(\ln n)$

Les résultats concernant les limites des fonctions exponentielles, puissances et logarithmes s'appliquent aux suites.

<u>Propriété 1</u>

Suite	Hypothèse	Conclusion
$(a^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a \in \mathbb{R}$ Suite géométrique de raison a	Si $-1 < a < 1$	alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$
	Si $a = 1$	alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 1$
	Si $a > 1$	alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$
	Si $a \leq -1$	alors la suite (a^n) n'a pas de limite
$(n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ Suite puissance	Si $\alpha < 0$	alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$
	Si $\alpha = 0$	alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 1$
	Si $\alpha > 0$	alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$
$(\ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ Suite logarithme		$\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln n) = +\infty$

<u>Exercice de fixation</u>

Pour chaque limite, parmi les quatre lettres A, B, C et D, choisis la lettre correspondant à la réponse juste.

		A	B	C	D
1	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-3} =$	0	1	$+\infty$	n'existe pas
2	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{2}{3}} =$	0	1	$+\infty$	n'existe pas
3	$\lim\limits_{n\to+\infty} (-3)^n =$	0	1	$+\infty$	n'existe pas
4	$\lim\limits_{n\to+\infty} (-\frac{2}{e})^n =$	0	1	$+\infty$	n'existe pas
5	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-\frac{5}{6}} =$	0	1	$+\infty$	n'existe pas
6	$\lim\limits_{n\to+\infty} (7)^n =$	0	1	$+\infty$	n'existe pas

Solution

1. A ; 2. C ; 3. D ; 4. A ; 5. A ; 6. C

Remarque : Les propriétés de croissances comparées des fonctions exponentielles, puissances et logarithmes s'appliquent aux suites de types (a^n), (n^α) et $(\ln n)$.

<u>Propriété 2</u> (Croissance comparée)

Si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n^{\alpha}} = 0$.
Si $a > 1$ et $\alpha > 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^{\alpha}}{a^{n}} = 0$.
Si $0 < a < 1$ et $\alpha < 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^{\alpha}}{a^{n}} = +\infty$.

<u>Exercice de fixation</u>
Calcule la limite de chacune des suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par :
$u_n = \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$, $v_n = n^2 - 2^{n+3}$ et $w_n = \frac{n \times 3^n}{4^n}$.

Solution

- On a : $\frac{\sqrt{n}}{\ln n} = \frac{1}{\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}}}$. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- On a :$(n^2 - 2^{n+3}) = 2^n(\frac{n^2}{2^n} - 8)$.
  Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{n^2}{2^n} - 8\right) = -8$, car $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.
- On a : si $a > 1$ et $\alpha > 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^{\alpha}}{a^{n}} = 0$.
  $\frac{n \times 3^n}{4^n} = \frac{n}{(\frac{4}{3})^n}$ $et\ a = \frac{4}{3}\ et\ a > 1\ ;\ \alpha = 1\ et\ \alpha > 0$.Tapez une équation ici.

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$.

b. Propriétés de comparaison
Les propriétés de comparaison concernant les fonctions sont applicables aux suites.

- Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques convergentes.

Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

- Soit (u_n) une suite numérique.
- S'il existe une suite (v_n) telle que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
- S'il existe une suite (v_n) telle que $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

- Soit (u_n) une suite numérique et l un nombre réel.
  S'il existe deux suites (v_n) et (w_n) telles que $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et si (v_n) et (w_n) convergent vers l, alors la suite (u_n) est convergente et sa limite est l.

Conséquence

Soit (u_n) une suite numérique et l un nombre réel
S'il existe une suite (v_n) telle que $|u_n - l| \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si (v_n) converge vers 0, alors la suite (u_n) est convergente et sa limite est l.

<u>Exercices de fixation</u>

<u>Exercice 1</u>
Soit les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = \frac{n^2}{2^n} - 8$ et $v_n = \frac{n^2}{2^n}$.
Justifie que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

Solution
On a : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

<u>Exercice 2</u>

Soit les suites (u_n) et (v_n) définies sur ℕ par : $u_n = -n + \cos n$ et $v_n = n^2 + (-1)^n$.
Calcule la limite de chacune des suites (u_n) et(v_n).

Solution
- Comme $\cos(n) \leq 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \leq -n + 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(-n+1) = -\infty$;
  alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
- Comme $(-1)^n \geq -1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n^2 - 1 \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2-1) = +\infty$;
  alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

c. Limite d'une suite du type : $\boldsymbol{v_n = f(u_n)}$

<u>Propriété</u>
Soit f une fonction, E son ensemble de définition et (u_n) une suite d'éléments de E .La suite (v_n) définie par $\boldsymbol{v_n = f(u_n)}$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$, $(l \in \mathbb{R})$.

<u>Exercice de fixation</u>
Détermine la limite de la suite (v_n)de terme général $v_n = n\, sin\frac{1}{n}$.

Solution
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)}$.
Posons : pour tout $\in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n}$. Soit f la fonction définie sur $]0;\, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.
On a : $v_n = f(u_n)$.
On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

d. Suite récurrente
<u>Propriété</u>
Soit f une fonction continue sur un intervalle K et (u_n) une suite à valeurs dans K définie par la formule de récurrence : $\begin{cases} u_0 = a\, , a \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$
Si la suite (u_n) est convergente, alors sa limite est une solution de l'équation :

$$x \in K, f(x) = x.$$

<u>Exercice de fixation</u>

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0{,}8 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1 + \frac{u_n}{2}) \end{cases}$.
On suppose que la suite (u_n) est décroissante et que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$.
Démontre que la suite (u_n) est convergente et détermine sa limite.

Solution
La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 ; donc elle converge.

On a : $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \frac{1}{2}x(1 + \frac{1}{2}x)$.
La fonction f est continue sur $[0; 1]$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 1]$; donc la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation : $x \in [0; 1], f(x) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}x\left(1 + \frac{1}{2}x\right) = x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x = 2$$

Puisque, $0 \in [0; 1]$ et $2 \notin [0; 1]$ donc, 0 est l'unique solution de l'équation : $x \in [0; 1], f(x) = x$.
Par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

C. SITUATION COMPLEXE

Une entreprise achète un véhicule à un coût de 30 000 000 F CFA. Ce véhicule se déprécie de 20% par an ; c'est-à-dire que son prix de revente baisse de 20% par an, pendant la même période, les prix des véhicules neufs de ce type augmentent de 3% par an. L'entreprise prévoit remplacer ce véhicule dans cinq ans en le revendant à un employé si la différence du prix d'achat du nouveau véhicule et le prix de revente de l'ancien véhicule n'excède pas 25 000 000 F CFA. Ton père est employé dans cette société et envisage acquérir ce véhicule au bout de cinq ans si son prix n'excède pas les 10.000 000 F CFA. Il se demande si la société acceptera de lui céder ce véhicule. Il te sollicite pour savoir s'il peut l'acheter.
En utilisant tes connaissances mathématiques donne-lui une réponse argumentée.

Solution

- Pour répondre à la préoccupation de l'employé, je vais utiliser les suites numériques.
- Je calcule le prix de vente de chaque véhicule dans cinq ans.
- Je fais la différence des deux prix pour répondre à la préoccupation de l'employé.

- Soit u_n le prix de revente de l'ancien véhicule après n années d'utilisation
  On a : u_{n+1}= $u_n - 0{,}2u_n$= $0{,}8u_n$
  Donc u_5= 30000000 x $(0{,}8)^5$= 9 830 400 .

- Soit v_n le prix d'achat d'un nouveau véhicule après n années
  On a : v_{n+1}= $v_n + 0{,}03u_n$= $1{,}03\, u_n$
  Donc v_5= 30000000 x $(1{,}03)^5 \approx 34778222$.

- $v_5 - u_5 = 34778222 - 9830400 \approx 24\,947\,822$
  - **Comme 24 947 822** $< 25\,000\,000$ **alors l'employé pourra acquérir ce véhicule après cinq ans.**

D. EXERCICES

1. Exercices de fixation

Exercice 1
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
Relie à chaque élément du tableau de gauche l'élément du tableau de droite correspondant.

Si $q > 1$ et $u_0 > 0$, alors	•	•	(u_n) n'a pas de limite
Si $-1 < q < 1$, alors	•	•	(u_n) diverge vers $+\infty$
Si $u_0 < 0$ et $q > 1$, alors	•	•	(u_n) converge vers 0
Si $q < -1$, alors	•	•	(u_n) diverge vers $-\infty$

Exercice 2

Soit (v_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme v_0.
Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations contenues dans le tableau ci-dessous.

N°	Affirmations	Réponses
1	Si $v_0 > 0$, alors (v_n) diverge vers $+\infty$.	
2	Si $r < 0$, alors (v_n) diverge vers $-\infty$.	
3	Si $r = 0$, alors (v_n) converge vers v_0.	

Solution

1) faux ; 2) vrai ;3) vrai.

Exercice 3
Soit la suite(u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 2$ par : $u_n = \sqrt{\ln n}$.
Etudie le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.
Solution

Considérons la fonction f définie sur $[2; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{\ln x}$.
Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a : $u_n = f(n)$.
$\forall\, x \in [2; +\infty[, f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$. $\forall\, x \in [2; +\infty[, f'(x) > 0$. Donc la fonction f est croissante sur$[2; +\infty[$.
Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante.

Exercice 4

Etudie la convergence de la suite numérique de terme général $(-1)^n$.
Solution

Tous les termes de rang pair de cette suite sont égaux à 1 et ceux de rang impair à -1.
Donc cette suite n'admet pas de limite. Elle est divergente.

Exercice 5
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la suite numérique définie par : $u_n = \frac{n+3n^2}{1+n^2}$.
Démontre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$est minorée par 2.
Solution
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n - 2 = \frac{n+3n^2}{1+n^2} - 2 = \frac{n^2+n-2}{1+n^2}$; donc : $u_n - 2 = \frac{(n-1)(n+2)}{1+n^2}$
$n \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow n \geq 1$, d'où : $\frac{(n-1)(n+2)}{1+n^2} \geq 0$. Donc : $u_n - 2 \geq 0$, c'est-à-dire : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 2$.
On conclut donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$est minorée par 2.

Exercice 6

On considère la suite v définie sur ℕ par : $v_n = \sqrt{4 - \frac{2}{1+n^2}}$

Démontre que la suite v est minorée par$\sqrt{2}$ et majorée par 2.

Solution

Pour tout entier naturel n de ℕ, on a : $1 \leq 1 + n^2$.

$$1 + n^2 \geq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{1+n^2} \leq 1$$
$$\Leftrightarrow 0 < \frac{2}{1+n^2} \leq 2$$
$$\Leftrightarrow -2 \leq -\frac{2}{1+n^2} < 0$$
$$\Leftrightarrow 2 \leq 4 - \frac{2}{1+n^2} < 4$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{4 - \frac{2}{1+n^2}} < 2.$$

Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \leq v_n < 2$,donc, la suite v est donc bornée (minorée par $\sqrt{2}$ et majorée par 2).

Pour tout entier naturel n de ℕ, on a : $1 \leq 1 + n^2$.

$$1 + n^2 \geq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{1+n^2} \leq 1$$
$$\Leftrightarrow 0 < \frac{2}{1+n^2} \leq 2$$
$$\Leftrightarrow -2 \leq -\frac{2}{1+n^2} < 0$$
$$\Leftrightarrow 2 \leq 4 - \frac{2}{1+n^2} < 4$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{4 - \frac{2}{1+n^2}} < 2.$$

Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \leq v_n < 2$,donc, la suite v est donc bornée (minorée par $\sqrt{2}$ et majorée par 2).

Exercice 7

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

a) Etudie le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) Justifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$est majorée par 2.
(On pourra utiliser l'inégalité : $\forall\, k \geq 2;\ \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$).

c) Démontre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$est convergente.

Solution

a) On a: $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}$;
Or : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(n+1)^2} > 0$;

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

b) En utilisant l'inégalité : $\forall\, k \geq 2;\ \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$,
on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq 1 + (1 - \frac{1}{2}) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$.

Ce qui donne : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$, car $\frac{1}{n} > 0$.

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 2.
c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 2 ; donc elle converge.

d) On a: $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}$;
Or : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(n+1)^2} > 0$;
Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
e) En utilisant l'inégalité : $\forall\, k \geq 2;\ \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$,
on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \ \leq 1 + (1 - \frac{1}{2}) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$.
Ce qui donne : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \ \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$, car $\frac{1}{n} > 0$.
Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 2.
f) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 2 ; donc elle converge.

Exercice 8

Soit $a \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$ et les suites $(u_n)\ et\ (v_n)$ telles que $u_0 = 2$; $v_0 = 3$,$u_{n+1} = au_n + (1 - a)v_n\ \ et\ \ v_{n+1} = (1-a)u_n + av_n$.

1) Démontre par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}, v_n - u_n > 0$.
2) a- Démontre que la suite (u_n) est croissante.
   b- Démontre que la suite (v_n) est décroissante.
   c- Démontre que les suites $(u_n)\ et\ (v_n)$ sont convergentes.
3) Soit la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$.
   a- Démontre que la suite (w_n) est une suite géométrique à déterminer.
   b- En déduire que les suites $(u_n)\ et\ (v_n)$ ont la même limite.
4) Soit la suite (t_n) définie par $t_n = u_n + v_n$.
   a- Démontre que la suite (t_n) est une suite constante.
   b- En déduire la limite commune des suites $(u_n)\ et\ (v_n)$.

Solution

1) Démontrons par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}, v_n - u_n > 0$.
- $v_0 - u_0 = 3 - 2 = 1 > 0$, donc la proposition est vraie au rang 0.
- Soit $k \in \mathbb{N}$.
  Supposons que $v_k - u_k > 0$, démontrons que $v_{k+1} - u_{k+1} > 0$.
  $v_{k+1} - u_{k+1} = (1-a)u_k + av_k - (au_k + (1-a)v_k) = (2a-1)(v_k - u_k)$,
  D'après l'hypothèse de récurrence $v_k - u_k > 0$, par définition, $a \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[\Leftrightarrow 0 < 2a - 1 < 1$
  Donc $v_{k+1} - u_{k+1} > 0$ et la proposition est vraie au rang $k + 1$.
- Conclusion : pour tout entier $n \in \mathbb{N}, v_n - u_n > 0$.

2)

a. $u_{n+1} - u_n = au_n + (1-a)v_n - u_n = (1-a)(v_n - u_n)$.
   D'après 1) pour tout entier $n \in \mathbb{N}, v_n - u_n > 0$, de plus $a \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$ donc $(1-a) > 0$.
   D'où pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est strictement croissante.
b. $v_{n+1} - v_n = v_{n+1} = (1-a)u_n + av_n - v_n = (1-a)(u_n - v_n) = -(1-a)(v_n - u_n)$.
   D'après a. pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n < 0$ et la suite (v_n) est strictement décroissante.
c. La suite (u_n) est croissante donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}, u_0 \leq u_n$.
   La suite (v_n) est décroissante donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}, v_n \leq v_0$.
   D'après 1) pour tout entier $n \in \mathbb{N}, v_n - u_n > 0$, c'est-à-dire pour tout entier $n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$.

D'où pour tout entier $n \in \mathbb{N}, u_0 \leq u_n < v_n \leq v_0$.
La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0 donc elle est convergente.
La suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0 donc elle est convergente.

3) Soit la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$.

a. $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = (1-a)u_n + av_n - (au_n + (1-a)v_n) = (2a-1)(v_n - u_n)$ donc $w_{n+1} = (2a-1)w_n$. La suite (w_n) est la suite géométrique de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 1$ et de raison $q = 2a - 1$.

b. $a \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$ donc $\frac{1}{2} < a < 1$, soit $1 < 2a < 2 \ \ et \ 0 < 2a - 1 < 1$.
La suite géométrique (w_n) a pour raison $q = 2a - 1 \ \ avec \ 0 < q < 1$ donc elle converge vers 0 et $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.
Conclusion : les suites $(v_n) \ et \ (u_n)$ ont la même limite.

4) Soit la suite $(t_n) \ avec \ t_n = u_n + v_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

a. $t_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = au_n + (1-a)v_n + (1-a)u_n + av_n = u_n + v_n = t_n$.
Donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}, t_{n+1} = t_n$.
La suite (t_n) est constant.

b. pour tout entier $n \in \mathbb{N}, t_n = t_0 = u_0 + v_0 = 3 + 2 = 5$.
Soit l la limite commune de $(u_n) \ et \ de \ (v_n)$. Comme la suite (t_n) est une suite constant alors elle est convergent.

- D'une part : $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 5 = 5$.
- D'autre part : $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2l$.
- On a donc $2l = 5 \Leftrightarrow l = \frac{5}{2}$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{5}{2}$.

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

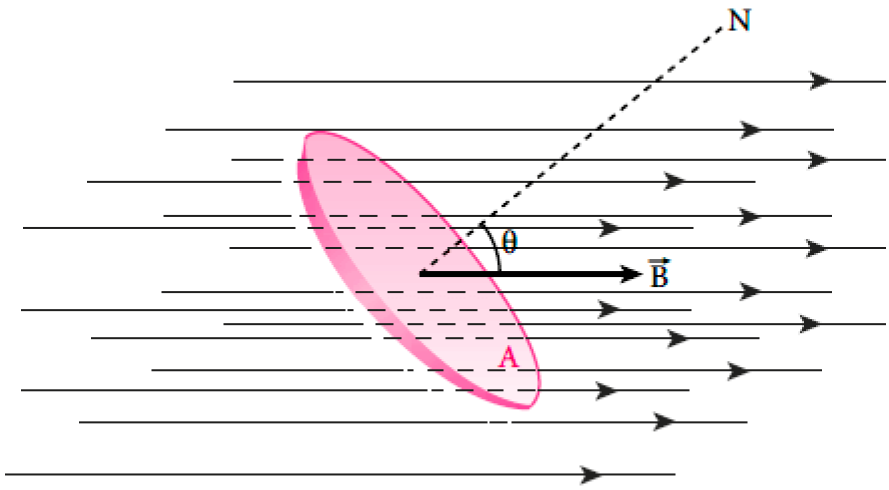
THEME : FONCTION NUMERIQUE

Durée : 12 **heures** **Code :**

LEÇON 10 : CALCUL INTEGRAL

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Dans ses recherches sur internet, un élève de Terminale scientifique découvre le document suivant :
Densité de flux magnétique



La densité du flux magnétique dépend du flux magnétique traversant la zone A :
$\Phi = \int B \times dA$.
Si le champ magnétique est homogène et la surface A uniforme, le flux magnétique Φ est calculé avec le produit suivant : $\Phi = B \times A$.
Il montre le document à ses camarades de classe qui sont intrigués par la formule
$\Phi = \int B \times dA$.
Ils décident de s'informer pour comprendre cette formule.

B. CONTENU DU COURS

I. Intégrale d'une fonction continue

1. Notion d'intégrale

a) Propriété et définition
Soit f une fonction **continue sur un intervalle K**, a et b deux éléments de K et F une primitive de f sur K.
Le nombre réel F(b) − F(a) ne dépend pas de F.
Il est appelé **intégrale de a** à **b de** $\boldsymbol{f}$

Notation :

On note :

• $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **et on lit « intégrale (ou somme) de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ »**

ou

• $[\mathrm{F}(x)]_a^b$ et on lit : " $\mathrm{F}(x)$ pris entre a et b".

Donc, on a : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [\mathrm{F}(x)]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$

b) REMARQUES

• a et b sont appelés bornes de l'intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

• La lettre x n'intervient pas dans le résultat de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

On peut donc la remplacer par toute autre lettre différente de a et b. On l'appelle **variable muette**.

On a : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(\mathrm{t})\mathrm{dt} = \int_a^b f(\mathrm{z})\mathrm{dz} = \cdots = \mathrm{F(b)} - \mathrm{F(a)}$.

c) Conséquences de la définition

- $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$
- $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Exercice de fixation :

Calcule les intégrales suivantes:

$$\mathrm{I} = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x \;; \qquad \mathrm{P} = \int_0^1 \mathrm{z}^2\mathrm{dz} \quad ; \quad \mathrm{J} = \int_3^1 (1 - \frac{1}{\mathrm{t}})\mathrm{dt} \;\text{ et }\; \mathrm{H} = \int_{-12}^{-12} x\sqrt{3 - x}\mathrm{dx}$$

Solution :

• Considérons la fonction continue sur $[0; 1]$ et définie par : $f(x) = x^2$.

Une primitive de f sur $[0; 1]$ est la fonction F définie par : $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{3}x^3$.

Donc $\mathrm{I} = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}\times 1^3 - 0 = \frac{1}{3}$.

• $\mathrm{P} = \mathrm{I} = \frac{1}{3}$ car la variable z est muette

• Considérons la fonction continue sur $[1; 3]$ et définie par $f(\mathrm{t}) = \left(1 - \frac{1}{\mathrm{t}}\right)$

Une primitive de f est la fonction F définie par $\mathrm{F(t)} = \mathrm{t} - \mathrm{lnt}$.

Donc : $\mathrm{J} = \int_3^1 \left(1 - \frac{1}{\mathrm{t}}\right)\mathrm{dt}$

$= [\mathrm{t} - \mathrm{lnt}]_3^1$

$= (1 - \ln 1) - (3 - \ln 3)$

$= 1 - 3 + \ln 3$

$\mathrm{J} = -2 + \ln 3$

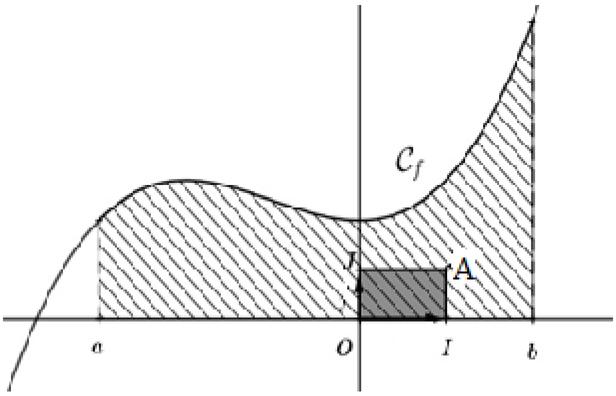
• $\mathrm{H} = \int_{-12}^{-12} x\sqrt{3 - x}\mathrm{d}x = 0$ car les bornes de l'intégrale H sont identiques.

d) Interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction continue et positive

Propriété

Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[\mathrm{a}; \mathrm{b}]$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est l'aire $\mathcal{A}$ (en unités d'aire) de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), l'axe (OI), les droites d'équations $x = \mathrm{a}$ et $x = \mathrm{b}$.



L'unité d'aire est l'aire du rectangle OIAJ

1u. a = OI×OJ

On a : $\mathcal{A} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x)\mathrm{d}x$ u. a

Remarques

• La partie du plan limitée par la courbe (C_f), l'axe (OI), les droites d'équations $x = \mathrm{a}$ et $x = \mathrm{b}$ est aussi l'ensemble des points $\mathrm{M}(\mathrm{x};\mathrm{y})$du plan tels que : $\begin{cases} \mathrm{a} \leq x \leq \mathrm{b} \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

Exercice de fixation :

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O ; I ; J). Unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 3 cm sur l'axe des ordonnées.

On considère la fonction *f* définie par : *f*(*x*) = 2*x* + 1.

1) Justifie que *f* est continue et positive sur [0 ; +∞[

2)Interprète graphiquement $\int_0^5 f(x)dx$.

Solution

1)

• f étant une fonction polynôme, f est continue sur ℝ donc sur [0 ;+∞[.

• $2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$. Donc *f* est positive sur $[-\frac{1}{2}$; +∞[, en particulier sur [0 ; +∞[.

2)$\int_0^5 f(x)dx$ représente l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de *f*, la droite (OI), les droites d'équations $x = 0$ et $x = 5$. L'unité d'aire u.a est 6cm²

2) Propriétés de l'intégrale

a) Propriétés algébriques

Propriété 1 : Égalité de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle K ; a, b et c trois éléments de K.

On a : $\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{c}} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\mathrm{c}}^{\mathrm{b}} f(x)\mathrm{d}x$

Exercice de fixation :

Soit la fonction f continue sur ℝ et définie par : $\begin{cases} f(x) = 2x - 1, \text{ si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{si } x > 1 \end{cases}$

Calcule $\mathrm{A} = \int_0^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x$

Solution

$\mathrm{A} = \int_0^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x$

$=\int_0^1 (2x-1)\mathrm{d}x + \int_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$
$= [x^2 - x]_0^1 + [\ln x]_1^{\mathrm{e}}$
$= 1 - 1 - 0 + (1 - 0)$
$= 1$

Propriété 2 : Linéarité

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle K ; a et b deux éléments de K et $\propto$ un nombre réel.
On a :

- $\int_a^b [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- $\int_a^b \propto f(x)\mathrm{d}x = \propto \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Exercice de fixation :

Calcule $\int_0^{2\pi} (-3\cos x + 2\sin x)\mathrm{d}x$.

Solution

$\int_0^{2\pi} (-3\cos x + 2\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} (-3\cos x)\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi} (2\sin x)\mathrm{d}x$
$= -3\int_0^{2\pi} \cos x\,\mathrm{d}x + 2\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$
$= -3[\sin x]_0^{2\pi} + 2[-\cos x]_0^{2\pi}$
$= -3(0 - 0) + 2(-1 + 1)$
$= 0$

b) Propriétés de comparaison

Propriété 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.
Si $f \geq 0$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Exercice de fixation :

On considère la fonction f de ℝ vers ℝ définie par : f(x) = x^2.
Justifie sans calcul que : $\int_{-2}^{7} f(x)dx \geq 0$.

Solution

Pour tout x élément de [-2 ; 7], $x^2 \geq 0$, donc $\int_{-2}^{7} f(x)dx \geq 0$.

Propriété 2

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$.
Si $f \leq g$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Exercice de fixation:

Démontre que : $\int_0^1 (x^2 + 1)dx \geq \int_0^1 2xdx$

Solution

Pour tout x , élément de [0 ; 1], $(x-1)^2 \geq 0$, on a : $x^2 + 1 \geq 2x$
Donc $\int_0^1 (x^2 + 1)dx \geq \int_0^1 2xdx$

Propriété 3 : Inégalité de la moyenne

f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, m et M sont deux nombres réels.

- Si $m \leq f \leq M$ sur $[a;b]$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.
- Si $|f| \leq M, (M \geq 0)$ sur $[a;b]$, alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(b-a)$.

Exercice de fixation :

En supposant que : $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$, $1 \leq \frac{1}{sinx} \leq \sqrt{2}$, justifie que : $\frac{\pi}{4} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sinx}dx \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

Solution

On sait que : $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$, $1 \leq \frac{1}{sinx} \leq \sqrt{2}$. D'après l'inégalité de la moyenne, on a :

$1\times(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sinx}dx \leq \sqrt{2} \times (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$

Donc $\frac{\pi}{4} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sinx}dx \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

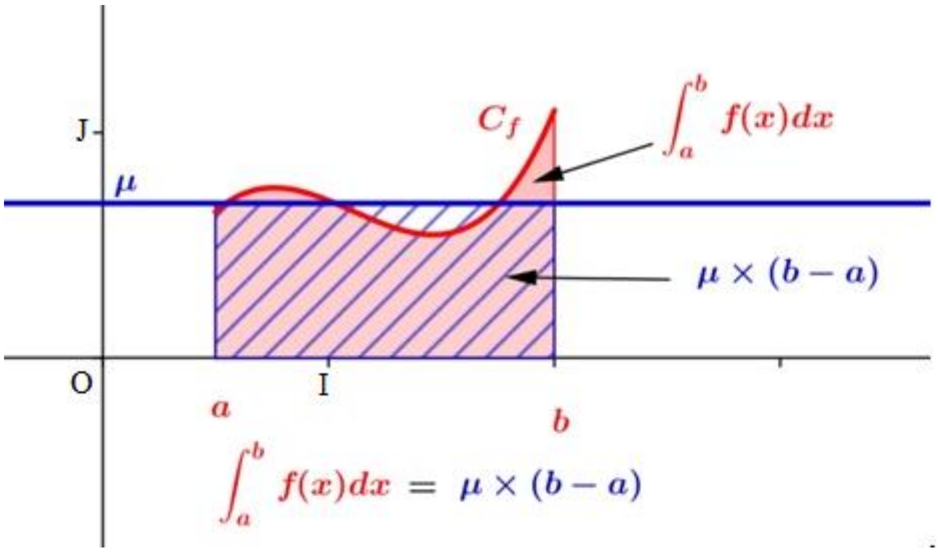
3) Valeur moyenne d'une intégrale

Définition

f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
On appelle valeur moyenne de f sur $[a;b]$, le nombre réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Interprétation graphique :

Posons : $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$



Dans le cas d'une fonction positive,
La valeur moyenne μ de f sur $[a;b]$ est la hauteur du rectangle de base (b-a) ayant la même aire (en unités d'aire) que la partie du plan limitée par la courbe (C_f), l'axe (OI), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Exercice de fixation :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - sinx$.
Calcule la valeur moyenne de f sur $[0;\pi]$.

Solution

$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

$\mu = \frac{1}{\pi-0}\int_0^{\pi}(x - sinx)dx$

$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2 + cosx\right]_0^{\pi}$

$= \frac{1}{\pi}(\frac{1}{2}\pi^2 - 2)$

$= \frac{\pi^2-4}{2\pi}$

II. Techniques de calcul d'une intégrale

1) Utilisation de primitives

Exemple 1:

Calculons l'intégrale I telle que $I = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$

Considérons la fonction f continue sur $[0; 1]$ et définie par : $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.

Posons $u(x) = 1 + e^x$, $u'(x) = e^x$;f est de la forme $\frac{u'}{u}$

Une primitive de f sur $[0; 1]$ est la fonction F définie par : $F(x) = ln(1 + e^x)$. Donc $I = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$

$= [ln(1 + e^x)]_0^1$

$= ln(1 + e^1) - ln(1 + 1)$

$= ln(1 + e) - ln(2).$

$= ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$

Exemple 2

Calculons l'intégrale J telle que $J = \int_0^1 xe^{x^2}dx$

Indication

Posons : $u(x) = x^2$; $xe^{x^2} = \frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$

Exercice 3

Calcule l'intégrale K telle que $K = \int_0^{\frac{\pi}{3}} cos^3t dt$

Indication

$cos^3t = (cost)(1 - sin^2t)$

$= cost - costsin^2t$

2) Intégration par parties

Propriété

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a; b]$.
Si les dérivées u' et v' sont continues sur $[a; b]$, alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Exercice de fixation :

Calcule $I = \int_1^e x^2 lnx\, dx$

Solution

Posons $u(x) = lnx$ $donc$ $u'(x)=\frac{1}{x}$

$v'(x) = x^2$ et prenons $v(x)=\frac{1}{3}x^3$

Ainsi $\int_1^e u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u'(x)v(x)dx$

$\int_1^e x^2 lnx\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 lnx\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}(\frac{1}{3}x^3)dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3 lnx\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{3}x^2 dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3 lnx\right]_1^e - \left[\frac{1}{9}x^3\right]_1^e$

$= \frac{2e^3+1}{9}$

3) Changement de variable affine

Pour calculer $\int_a^b f(\propto x+\beta)dx,\ \propto et\ \beta$ sont des nombres réels tel que $\propto \neq 0$, on peut procéder comme suit :

- Faire le changement de variable : $t = \propto x + \beta$
  On a : $dt = \propto dx$. D'où $dx = \frac{1}{\propto}dt$
  $x = a \Leftrightarrow t = \propto a + \beta$
  $x = b \Leftrightarrow t = \propto b + \beta$.
- Utiliser l'égalité: $\int_a^b f(\propto x+\beta)dx = \int_{\propto a+\beta}^{\propto b+\beta} \frac{f(t)}{\propto}dt$.

Exercice de fixation :
Calcule $P = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{2x+3}}dx$

Solution :
Posons $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ donc $f(2x+3) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$
Posons $t = 2x + 3$ on déduit :

- $dt = 2dx$ donc $dx = \frac{1}{2}dt$
- $x = -1 \Leftrightarrow t = 1$ et
  $x = 0 \Leftrightarrow t = 3$

Par conséquent,

$$P = \int_{-1}^{0} f(2x+3)dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{2x+3}}dx = \int_{1}^{3} \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \times \frac{1}{2}dt$$

$$= \int_1^3 \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$$

$$= \left[\sqrt{t}\right]_1^3$$

$P = \sqrt{3} - 1$

4) Intégration des fonctions paires, impaires, périodiques

Propriété1

Soit f une fonction continue sur un intervalle K symétrique par rapport à 0.
Pour tout élément a de K, on a :

- Si f est paire, alors : $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$
- Si f est impaire, alors : $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

Exercice de fixation :
Calcule $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} cos2x dx$ et $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} sin2x dx$

Solution :

➢ La fonction $x \mapsto cos2x$ est paire et continue sur $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ donc

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} cos2xdx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} cos2xdx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 2cos2xdx = [sin2x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$$

➢ La fonction $x \mapsto sin2x$ est impaire et continue sur $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ donc

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} sin2xdx = 0$$

Propriété 2

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique, de période T.
Pour tous nombres réels a et b, on a :

- $\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$

Exercice de fixation :

Calcule $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} cos2xdx$

Solution :

La fonction $x \mapsto cos2x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et périodique, de période π, donc

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} cos2xdx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\pi} cos2xdx = \int_{0}^{\pi} cos2xdx = 0$$

III. Calcul d'aires

Propriétés

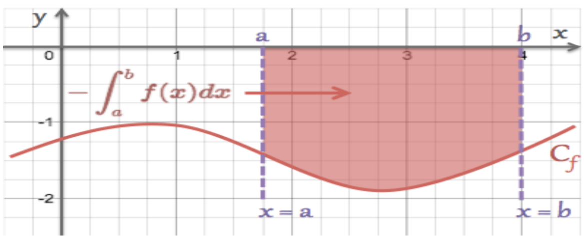
Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1) Soit f une fonction continue sur $[a; b]$, (C_f) sa courbe représentative.
$\mathcal{A}$ est l'aire de la partie du plan limitée par (C_f), l'axe des abscisses (OI), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

a) Si f est positive sur $[a; b]$, alors : $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx\,.ua$

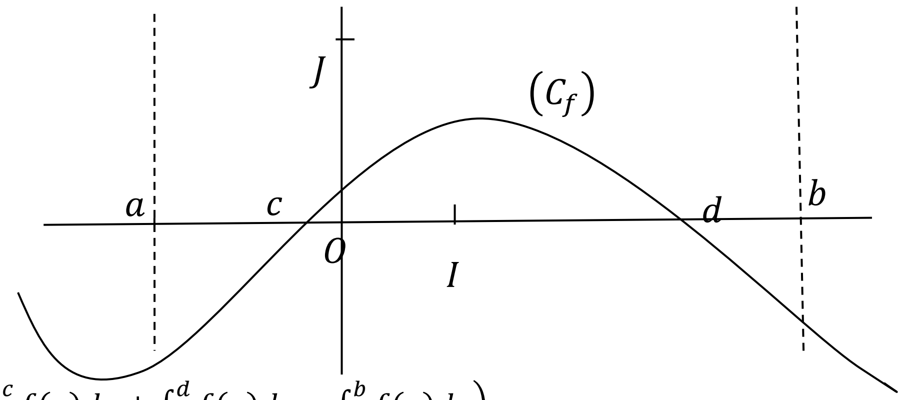
b) Si f est négative sur $[a; b]$, alors : $\mathcal{A} = -\int_a^b f(x)dx\,.ua$

Par exemple, sur la figure ci-dessous, f est une fonction **continue et négative** sur l'intervalle $[a; b]$, on a : $\mathcal{A} = -\int_a^b f(x)dx\ ua$



c) Si f ne garde pas un signe constant sur $[a;b]$, alors on subdivise $[a;b]$ en des intervalles sur lesquels f garde un signe constant.

Par exemple, sur la figure ci-dessous, on subdivise $[a;b]$ en $[a;c]$, $[c;d]$ et $[d;b]$.
f est positive sur $[c;d]$ et f est négative sur $[a;c]$ et sur $[d;b]$



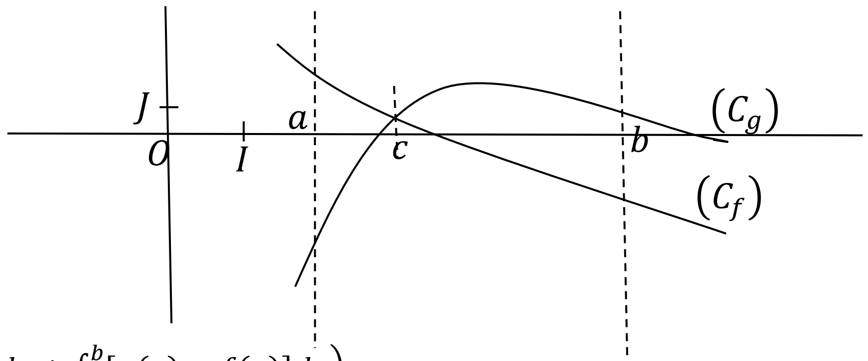
On a : $\mathcal{A} = \left(-\int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx - \int_d^b f(x)dx\right) ua$

2) Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$, (C_f) et (C_g) leurs courbes représentatives respectives.
$\mathcal{A}$ est l'aire de la partie du plan limitée par (C_f), (C_g), les droites d'équations : $x = a \ et \ x = b$.

a) Si $f \leq g$ sur $[a; b]$, alors : $\mathcal{A} = \left(\int_a^b [g(x) - f(x)]dx\right) ua.$

b) Si $f - g$ ne garde pas un signe constant sur $[a; b]$, alors on procède comme au 1)c.

Par exemple, sur la figure ci-contre :



On a : $\mathcal{A} = \left(\int_a^c [f(x) - g(x)]dx + \int_c^b [g(x) - f(x)]dx\right) ua$

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I , J). Unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.
On considère la fonction f définie par : f (x) =$-x^2$.
Calcule en cm², l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations : x = 1 et x = 3.

Solution

f est continue et négative sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ = $-\int_1^3 (-x^2)dx \ en \ (u.a)$
L'unité d'aire en cm² est 2×4 cm², donc $\mathcal{A}$ = ($\int_1^3 -(-x^2)dx$)×8 cm²
$\mathcal{A}$ = ($\int_1^3 x^2 dx$)×8 cm²
= $8 \times [\frac{1}{3}x^3]_1^3$ cm²
= 8 $(9-\frac{1}{3})$ cm²
$\mathcal{A}$ = $\frac{208}{3}$ cm²

Exercice 2

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3$. On désigne par (C_f), la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique $2cm$.
Calcule en unités d'aires, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par(C_f), l'axe des abscisses (OI), les droites d'équations $x = -1 \ et \ x = 1$.

Solution :

f étant continue, négative sur $[-1; 0]$ et positive sur $[0; 1]$
$\mathcal{A} = (-\int_{-1}^0 x^3 dx + \int_0^1 x^3 dx)\ ua$

$=\left(-\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1}\right)\times 2\times 2cm^2$

$= (-\,(0-\frac{1}{4}) + (\frac{1}{4}-0)) \times 4\ cm^2$

$\mathcal{A} = 2\ cm^2$

IV. Fonction du type $F: x \mapsto \int_a^x f(t)dt$

Propriété :

Soit f une fonction continue sur un intervalle K et a un élément de K.

La fonction de K vers $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{x \mapsto \int_a^x f(t)dt}$, est la primitive de f qui s'annule en a.

Conséquence :

Si F est une fonction définie sur un intervalle K par : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, alors: $\forall\ x \epsilon K$, $F'(x) = f(x)$

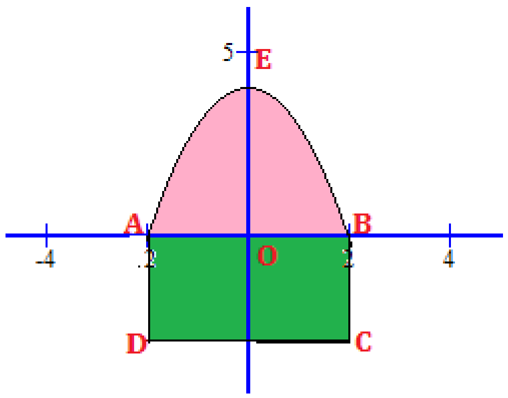
Exercice :

Justifie que la fonction logarithme népérien est la fonction F définie sur]0, + ∞ [par F(x)= $\int_1^x \frac{1}{t}dt$

Solution :

La fonction ln, est l'unique primitive sur]0, + ∞ [de la fonction , $\boldsymbol{x} \mapsto \frac{1}{x}$ et qui s'annule en 1. On en déduit que $ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$.

C- SITUATION COMPLEXE



Un de vos camarades de classe rend visite à l'ancien professeur de mathématiques de son père à la retraite. Il remarque les formes géométriques particulières de la terrasse de celui-ci (voir figure) : la partie en vert est délimitée par un rectangle de largeur 2 m et de longueur 4m et la partie en rose est délimitée par une portion de parabole et par un segment [AB]. Amusé par le regard de votre camarade, l'ancien professeur de mathématique le met au défi de lui calculer l'aire totale de la terrasse en vue de lui donner une idée du coût des travaux de revêtement de cette terrasse.

Il lui présente le plan de la terrasse en précisant que pendant la construction, il a veillé à ce que la parabole qui apparait dans le plan ait pour équation $y = -x^2+4$ dans le repère orthonormé d'origine O et d'unité 1m, avec A (-2,0) et B(2,0).

Aide ce camarade à relever ce défi.

Solution

Pour résoudre le problème, nous allons utiliser le calcul intégral.

Nous allons utiliser particulièrement le calcule d'aire

puis faire la somme des deux aires après les avoir calculées .

Aire A_1 de la partie en rose délimitée par la portion de la parabole

$A_1 = \int_{-2}^{2}(-x^2+4)dx$ = G(2) – G(–2) où G(x) = $-\frac{1}{3}x^3 + 4x$

$= -\frac{8}{3} + 8 + \frac{8}{3} + 8 = 16$

Aire A_2 de la partie rectangulaire

$A_2 = 2 \times 4 = 8$

AIRE TOTALE DE LA TERRASSE

$A_1 + A_2 = 16 \text{ m}^2 + 8\text{m}^2 = 24 \text{ m}^2$

D. EXERCICES

1. Exercices d'application

Exercice 1

Calcule les intégrales suivantes:

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (cosx + 2x)e^{(\sin x + x^2)}dx$; $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln z + 2}}{z}dz$ et $\int_{-2}^1 \frac{2t^3 - t}{(t^4 - t^2 + 3)^4}dt$.

Exercice 2

Calcule $P = \int_{-4}^{6} |x + 3|dx$

Exercice 3

1) Justifie que, pour tout nombre réel t, $\cos^3 t = (1 - \sin^2 t)\cos t$.

2) Calcule $\int_0^{\frac{\pi}{3}} -4\cos^3 t dt$

Exercice 4

Démontre que : $\int_0^{\pi} x^2 cosxdx \leq \int_0^{\pi} x^2 dx$.

Exercice 5

Soit a et b deux nombres réels de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ tels que $a < b$.

a) Démontre que : $\forall x \in [a; b]$, $\frac{1}{cos^2 a} \leq \frac{1}{cos^2 x} \leq \frac{1}{cos^2 b}$

b) Déduis-en que $\frac{b-a}{cos^2 a} \leq tanb - tana \leq \frac{b-a}{cos^2 b}$

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = 3x + cosx$

Calcule *la valeur moyenne de f sur* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Exercice 7

Calcule les intégrales suivantes :

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} cosxdx$; $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{cosx}{sinx}dx$ et $\int_{\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} cos^5 t sin^5 t dt$

Exercice 8

Calcule les intégrales suivantes **:**

$\int_1^2 x\sqrt{3 - x}dx$; $\int_0^1 (x + 1)e^x dx$; $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} xcosxdx$; $\int_2^3 lnxdx$ *et* $\int_0^2 x^2 e^x dx$ (par deux intégrations par parties)

Exercice 9

Calcule les intégrales suivantes en utilisant un changement de variable affine

$\int_{-\frac{5}{2}}^{-2} (2x + 5)^7 dx$, $\int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{2x+3}}dx$ et $\int_0^1 x\sqrt{x + 1}dx$

Exercice 10

Calcule: $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} x^6 sinxdx$; $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} x^6 cosxdx \quad et \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} cosxdx$

Exercice 11

Soit les fonctions f et g définies par : $f(x) = x + 2 \;\; et \;\; g(x) = x^2$

On désigne par$\left(C_f\right)$, $\left(C_g\right)$les courbes représentatives de f et g dans le plan muni d'un repère orthonormé(O, I, J) . Unité graphique: $2cm$

Calcule encm^2, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plandélimitée par $\left(C_f\right)$, $\left(C_g\right)$ et les droites d'équations : $x = -1 \;\; et \;\; x = 2$

Exercice 12

Un corps est lâché, avec une vitesse initiale à l'instant $t_0 = 0$, d'une hauteur de 2000m et il est soumis à l'accélération de la pesanteur g = 9,8m.s^{-2}

1) Justifie que la fonction D définie par : D(x)=$\int_0^x gxtdt$ est la distance parcourue après x secondes de chute.

2) Calcule l'instant T (en seconde) mis pour qu'il soit au sol.

2 . Exercices de renforcement

Calcule les intégrales suivantes **:**

$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx$;$\int_e^{e^2} \frac{1}{x(lnx)^2}dx$;$\int_{\frac{5}{3}}^{2} \frac{x^2}{(3x-4)^5}dx$; $\int_{-5}^{12} 2|2x+3|dx$; $\int_2^5 \frac{x+\frac{5}{2}}{x^2+5x-6}dx$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} cos^5 t sin^5 t dt \quad ; \quad \int_{-4}^{-2} \frac{t^2+3t-2}{t+1}dt \quad et \quad \int_0^{\frac{\pi}{3}} sin^6 x dx$$

2. Exercices d'approfondissement

Exercice 1 :

On pose : $\forall x \in \mathbb{R},\; f(x) = x + 1 - e^x$ et on admet que la fonction f est dérivable sur ℝ.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique$2cm$.

1) Calcule les limites en $+\infty$ de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$.

Interprète graphiquement les résultats obtenus.

2) a) Calculer la limite en $-\infty$ de$f(x)$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation ~~y = x~~ y=x+1 est asymptote à (C) en $-\infty$.

c) Etudier les positions relatives de (C) et (D).

3) Dresse le tableau de variation de f.

4) Trace (D) et(C).

5) Calcule en cm^2, l'aire $\mathcal{A}(\Delta)$de la partie Δ du plan limitée par (C), la droite (D),les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$.

SOLUTION

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 1 - e^x = \lim\limits_{x\to+\infty} x(1 + \frac{1}{x} - \frac{e^x}{x}) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} - \frac{e^x}{x} = -\infty$

Interprétation graphique : La courbe (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2.a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x + 1 - e^{x} = -\infty$ car $\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$

b) Il s'agit de justifier que $\lim_{x\to-\infty} f(x) - (x+1) = 0$.

Ce qui est évident car $f(x)-(x+1) = -e^{x}$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$

c) Il s'agit ici d'étudier le signe de $f(x)-(x+1)$ suivant les valeurs de x .

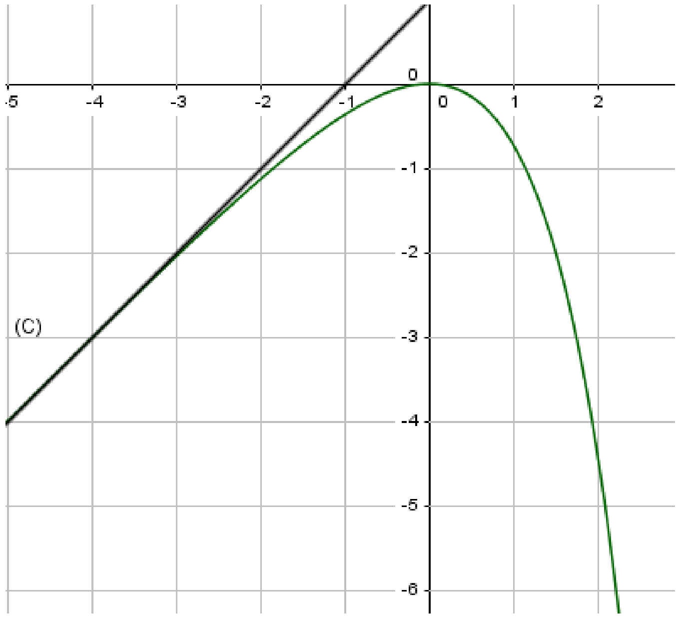
Or $f(x)-(x+1) = -e^{x}$ et $-e^{x} < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Donc La courbe (C) est en dessous de la droite (D).

3.) $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 - e^{x}$. Or $1 - e^{x} \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq e^{x}$

$\Leftrightarrow x \geq 0$

X	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		–
$f(x)$	↗	0	↘

4) La courbe de la fonction



5. <u>Calcul d'aire</u>

$\mathcal{A}(\Delta) = \int_{-2}^{0} x + 1 - f(x) = 4\times\ [e^{x}]_{-2}^{0} = 4(1-e^{-2})$.

Exercice 2 :

Soit F la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ définie par $\mathrm{F}(x) = \int_1^{x} \frac{e^{t}}{t} dt$.

On désigne par (C_F) la représentation graphique de F dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) tel que : $OI = 2cm$ et $OJ = 1cm$.

1) Détermine l'ensemble de définition de F.

2) Etudie le sens de variation de F

3) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \mathrm{F}(x) - \ln x$.

a) Justifie que : $\forall x \in]0; +\infty[\ , f(x) = \int_1^{x} \frac{e^{t}-1}{t} dt$

b) Justifie que : $\forall t \in]0;+\infty[$, $\frac{e^t-1}{t} > 0$. Déduis-en que : $\begin{cases} \forall x \in]0;1[\,, f(x) < 0 \\ \forall x \in]1;+\infty[\,, f(x) > 0 \end{cases}$.

c) En utilisant les propriétés de comparaison, détermine les limites de F en 0 et en$+\infty$.

4) Dresse le tableau de variation de F.

5) Justifie que (C_F) admet une asymptote verticale.

6) Soit $x \in]1;+\infty[$.

a) Démontre que : $\forall t \in [1;x]$, $\frac{e^t}{t} \geq \frac{e^t}{x}$ et que $F(x) \geq \frac{1}{x}\int_1^x e^t dt$

b) Déduis-en que :$\frac{F(x)}{x} \geq \frac{e^x - e}{x^2}$

C)Démontre que (C_F) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ).

SOLUTION

1) F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, F'(x) = $\frac{e^x}{x}$; $\frac{e^x}{x}$ étant positive pour toute valeur strictement positive de x, F'(x) est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Par suite, F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) a) Soit f, la fonction définie par : $f(x) = F(x) - \ln x$.

On a : f(x) = $\int_1^x \frac{e^t}{t} dt - \int_1^x \frac{1}{t} dt = \int_1^x (\frac{e^t}{t} - \frac{1}{t}) dt = \int_1^x \frac{e^t-1}{t}$ dt.

3.b) $\forall t \in]0;+\infty[$, $\frac{e^t-1}{t} > 0$ car $\forall t \in]0;+\infty[\,, e^t > 1$

Déduction

$\forall x \in]0;1[$, f(x) = $\int_1^x \frac{e^t-1}{t}$ dt. Or $\frac{e^t-1}{t} > 0$ *et* au niveau des bornes de l'intégrale, $x < 1$. Par conséquent, f(x) < 0.

$\forall x \in]1;+\infty[$, f(x) = $\int_1^x \frac{e^t-1}{t}$ dt. Or $\frac{e^t-1}{t} > 0$ *et* au niveau des bornes de l'intégrale, $1 < x$. Par conséquent, f(x) > 0.

3.c) On a montré que $\forall t \in]0;+\infty[$, $\frac{e^t-1}{t} > 0$. En particulier, $\forall t \in]0;1[$, $\frac{e^t-1}{t} > 0$

Ce qui peut s'écrire aussi : $\forall t \in]0;1[$, $\frac{e^t}{t} > \frac{1}{t}$. Par suite $\forall x \in]0;1[$, $\int_x^1 \frac{e^t}{t} dt > \int_x^1 \frac{1}{t} dt$ ou encore

$\forall x \in]0;1[$, $\int_1^x \frac{e^t}{t} dt < \int_1^x \frac{1}{t}$dt c'est-à-dire $\forall x \in]0;1[, F(x) < \ln x$

qd $x \to 0$, $\ln x \to -\infty$; *donc* $F(x) \to -\infty$

De la même manière, $\forall t \in]1;+\infty[$, $\frac{e^t-1}{t} > 0$

Ce qui peut s'écrire aussi : $\forall t \in]1;+\infty[$, $\frac{e^t}{t} > \frac{1}{t}$. Par suite $\forall x \in]1;+\infty[$, $\int_1^x \frac{e^t}{t} dt > \int_1^x \frac{1}{t} dt$

ou encore $\forall x \in]1;+\infty[, , F(x) > \ln x$.

Or qd $x \to +\infty$, $\ln x \to +\infty$; *donc* $F(x) \to +\infty$

4.) Tableau de variation de la fonction F

X	0		1	$+\infty$
F'(x)		+	E–1	+
F(x)			0	

5. $\lim_{x\to 0} F(x)=0$; par conséquent, (C_F) admet la droite d'équation x=0 comme asymptote verticale

6) Soit $x \in]1;+\infty[$.

a) **Démontrons que :** $\forall \mathbf{t} \in [\mathbf{1};x]$, $\frac{\mathbf{e^t}}{\mathbf{t}} \geq \frac{\mathbf{e^t}}{x}$ **et que** $\mathbf{F}(x) \geq \frac{\mathbf{1}}{x}\int_{\mathbf{1}}^{x} \mathbf{e^t dt}$

$t \in [1;x] \Leftrightarrow 1 \leq t \leq x \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{t} \leq 1$

$\Rightarrow \frac{e^t}{x} \leq \frac{e^t}{t}$

$\Rightarrow \int_1^x \frac{e^t}{x}\,dt \leq \int_1^x \frac{e^t}{t}dt$

C'est-à-dire : $\frac{1}{x}\int_1^x e^t\,dt \leq F(x)$

b) Déduction de : $\frac{\mathbf{F}(x)}{x} \geq \frac{\mathbf{e}^x-\mathbf{e}}{x^2}$

En passant aux calculs dans cette inégalité ($\frac{1}{x}\int_1^x e^t\,dt \leq F(x)$) on obtient :

$\frac{1}{x}(e^x-e) \leq F(x)$ ce qui revient à $F(x) \geq \frac{1}{x}(e^x-e)$. Et en multipliant les deux membres par $\frac{1}{x}$ qui est strictement positif , on obtient : $\frac{1}{x}F(x) \geq \frac{1}{x^2}(e^x-e)$.

c) On sait que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}(e^x-e)=+\infty$. On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}=+\infty$. Par suite, on peut affirmer la courbe (C_F) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées (OJ).

<u>Remarque</u> : $\frac{F(x)}{x}=\frac{1}{x}$

Terminal D

Mathématiques

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

THÈME : ORGANISATION ET TRAITEMENT DES DONNÉES

Durée : 10 **heures** **Code :**

Leçon 11 : STATISTIQUE À DEUX VARIABLES

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Dans le cadre des recherches pour un exposé, des élèves d'une classe de Terminale ont été accrochés par les informations suivantes :
La prévision météorologique est une science en pleine évolution. Elle a pour objectif de prédire un ensemble de paramètres comme la pluviométrie, la pression atmosphérique, la température, etc.
Le tableau suivant donne les pluviométries et températures moyennes de septembre 2018 à août 2019 dans une ville.

	Sept 2018	Oct. 2018	Nov. 2018	Déc 2018	Jan 2019	Fév. 2019	Mar 2019	Avr. 2019	Mai 2019	Juin 2019	Juillet 2019	Août 2019
Pluviométrie (en mm)	13	23	49	49	50	64	79	48	40	10	5	6
Température (en °C)	23	17	14	10	10	11	13	15	17	23	27	28

Dans l'affiche la température moyenne d'octobre 2019 était de 32 °C. Les élèves veulent connaitre la pluviométrie du mois d'octobre 2019. Un des élèves affirme que la pluviométrie n'est pas liée à la température et qu'on ne peut savoir la pluviométrie d'octobre. Ce que réfutent certains. Toute la classe ayant été saisi, décide de chercher à savoir si la pluviométrie est liée à la température et si c'est le cas, de prévoir la pluviométrie d'octobre 2019.

B. CONTENU DE LA LEÇON

I. Série statistique double

1. Définition

On considère deux caractères quantitatifs X et Y sur une même population de n individus.
On note : x_1 , x_2 , x_3 ,…, x_p les valeurs(ou les modalités)du caractère X ; y_1 , y_2 , y_3 ,…, y_p les valeurs du caractère Y et n_{ij} l'effectif du couple (x_i , y_j).
On appelle série statistique double de caractère (X, Y), l'ensemble des triplets (x_i , y_j , n_{ij}).

Exemple

Une étude statistique porte sur une population de 100 ménages. Deux caractères X et Y sont étudiés :
- le caractère X est le nombre d'enfants.
- le caractère Y est le nombre de pièces de l'appartement occupé.

On obtient le tableau ci-dessous qui représente la série statistique de caractère(X ,Y)

Y \ X	0	1	2	3	4	5
1	6	4	1	0	0	0

2	3	11	10	5	1	0
3	1	3	16	13	4	1
4	0	1	3	5	8	4

Sur la 1ère ligne, sont inscrites les valeurs du caractère X, soit $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$ $x_4 = 3$; $x_5 = 4$; $x_6 = 5$.
La 1ère colonne affiche les valeurs du caractère Y qui sont y_1 =1 ;y_2 =2 ; y_3 =3;y_4 =4.
Les nombres qui ne sont pas dans cette ligne et cette colonne, représentent les différents n_{ij}.
Ainsi considérons le nombre 4 dans ce tableau. On constate qu'il est dans la colonne de la valeur 1 du caractère X et dans la ligne de la valeur 1du caractère Y. On dit alors il y a 4 ménages qui ont un enfant et occupent un appartement d'une pièce.
Ainsi le couple (x_2, y_1)= (1 ; 1) a pour effectif $n_{21} = 4$.
Combien de ménages ont deux enfants et occupent un appartement de quatre pièces ?
On va donc considérer la colonne ayant la valeur 2 du caractère X et la ligne ayant la valeur 4 du caractère Y. L'intersection de cette ligne et de cette colonne est 3.
3 ménages ont donc deux enfants et occupent un appartement quatre pièces.
Ce tableau à double entrée ci-dessus est appelé **tableau de contingence.**

2. Taleau de séries marginales

Reprenons l'exemple précédent.
Il est question de trouver l'effectif de chaque modalité du caractère X et l'effectif de chaque valeur du caractère Y

Y \ X	0	1	2	3	4	5	Total
1	6	4	1	0	0	0	11
2	3	11	10	5	1	0	30
3	1	3	16	13	4	1	38
4	0	1	3	5	8	4	21
Total	10	19	30	23	13	5	100

Considérons le caractère X.
Pour trouver l'effectif de la valeur 0, on additionne tous les n_{ij}qui se trouvent dans la colonne de la valeur 0 c'est-à-dire 6+3+1+0=10. 10 ménages n'ont donc pas d'enfants.

Combien de ménages ont-ils quatre enfants ? Il est question donc d'additionner tous les n_{ij} se trouvant dans la colonne de la valeur 4 du caractère X.
On a donc 0+1+4+8=13 ménages.
On procède de la même manière pour trouver l'effectif des autres modalités du caractère X. Ainsi à chaque valeur on a son effectif dans la dernière ligne.

D'où le tableau linéaire associé à X :

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	10	19	30	23	13	5

La série ainsi obtenue est appelée série marginale du caractère X.

En faisant de même avec les lignes, on obtient l'effectif de la modalité 1 du caractère Y en additionnant les n_{ij} de la ligne où se trouve cette modalité. Soit 6+4+1+0+0+0=11.
On obtient ainsi l'effectif de chaque modalité du caractère Y dans la dernière colonne du tableau.

D'où le tableau linéaire associé à Y :

y_i	1	2	3	4
n_i	11	30	38	21

La série ainsi obtenue est appelée série marginale du caractère Y.

Dressons le tableau des fréquences marginales du caractère X.
On rappelle que la fréquence est l'effectif de la modalité sur l'effectif total.
On obtient le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5
f_i	$\frac{10}{100}$	$\frac{19}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{23}{100}$	$\frac{13}{100}$	$\frac{5}{100}$

De la même manière, définis le tableau des fréquences marginales du caractère Y.

y_i	1	2	3	4
f_i	$\frac{11}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{38}{100}$	$\frac{21}{100}$

3. Nuage de points

Définition

On considère deux caractères quantitatifs X et Y sur une même population de *n* individus.
On note x_1 , x_2 , x_3 ,…, x_p les valeurs du caractère X,
y_1, y_2 , y_3 ,…, y_p les valeurs du caractère Y.
On appelle nuage de points associé à la série statistique double de caractère (X, Y) les points de couple de coordonnées $(x_i; y_j)$ d'effectifs non nuls.

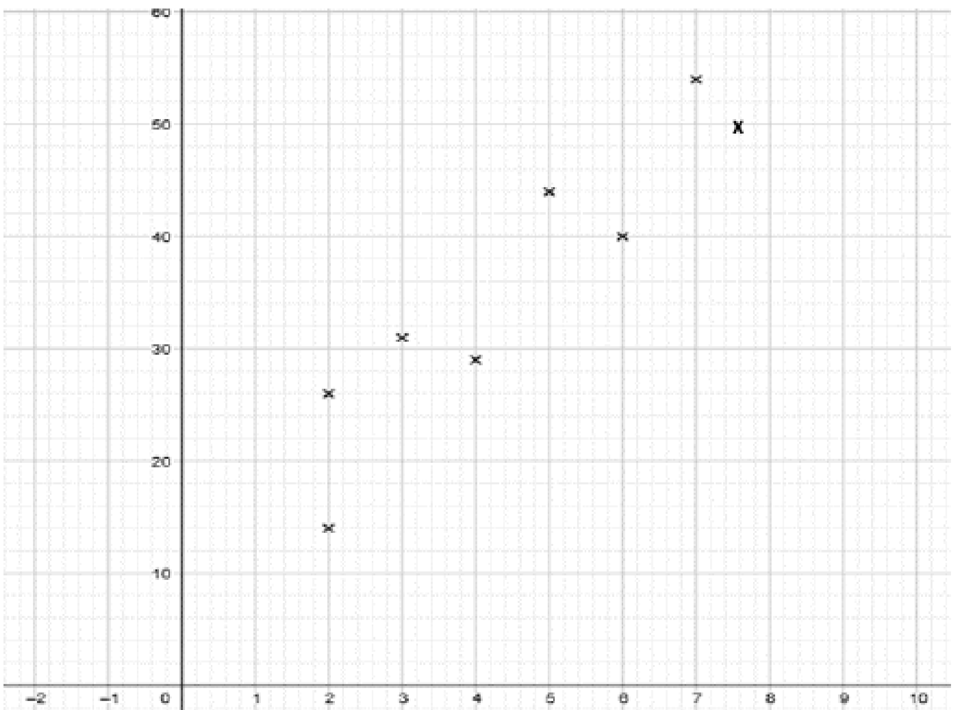
Exercice de fixation

Le tableau suivant donne le nombre d'exploitations agricoles d'une région selon leur superficie en hectares.

Superficie X	2	2	3	4	5	6	7	7,6
Nombre d'exploitations Y	14	26	31	29	44	40	54	50

Représente le nuage de points associé à cette série.

Solution



Remarque
Dans la suite, les séries doubles considérées seront comme la série de l'exemple précédent ; c'est-à-dire l'effectif n_{ij}du couple $(x_i\ ,y_j)$ vaut 1.

4. Point moyen

Définition
On appelle point moyen d'un nuage de n points M_i de coordonnées $(x_i; y_i)$ le point G de coordonnées $(x_G; y_G)$ telles que :
$x_G = \overline{X} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$; $y_G = \overline{Y} = \frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}$.

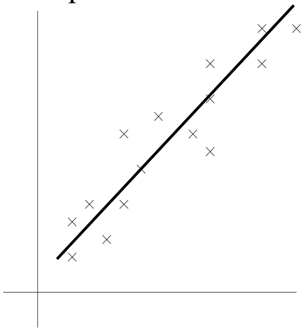
Exercice de fixation
Détermine les coordonnées du point moyen du nuage de points de la série statistique suivante :

Superficie X	2	2	3	4	5	6	7	7,6
Nombre d'exploitations Y	14	26	31	29	44	40	54	50

Réponse
C'est le point de coordonnées $(\overline{X} ;\overline{Y})$.
On a : $\overline{X} = \frac{2+2+3+4+5+6+7+7{,}6}{8} = \frac{36{,}6}{8} = 4{,}575$
et $\overline{Y} = \frac{14+26+31+29+44+40+54+50}{8} = \frac{288}{8} = 36$
Donc : G (4,575 ; 36)

II. Ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés

Soit un nuage de points associé à une série statistique double représenté dans un repère orthogonal.
Faire un ajustement de ce nuage de points, c'est trouver une courbe qui passe le plus près « possible » du maximum de points de ce nuage.
Lorsque cette courbe est une droite, on dit que l'ajustement est affine ou linéaire.



Exemple d'ajustement par une droite.

1. Covariance

Définition
On appelle covariance de la série statistique double de caractère (X ;Y),
le nombre réel noté COV(X ; Y) tel que :

$\text{COV}(X,Y) = \frac{1}{n}\sum n_{ij}(x_i - \overline{x})(y_j - \overline{y})$ ou $\text{COV}(X,Y) = \frac{\sum n_{ij}x_i y_j}{n} - \overline{\text{X}}\,\overline{\text{Y}}$.

Exercice de fixation

Calcule la covariance de la série statistique précédente

Superficie X	2	2	3	4	5	6	7	7,6
Nombre d'exploitations Y	14	26	31	29	44	40	54	50

Solution

La covariance $\text{COV}(\text{X},\text{Y})$de cette série statistique est $\frac{\sum x_i y_j}{n} - \overline{\text{X}}\,\overline{\text{Y}}$

$\text{COV}(\text{X},\text{Y}) = \frac{2\times14+2\times26+3\times31+4\times29+5\times44+6\times40+7\times54+7{,}6\times50}{8}$ - 4,575×36

$\text{COV}(\text{X},\text{Y}) = \frac{1503}{8} - 164{,}7.$

Donc :$\text{COV}(\text{X},\text{Y})$ = 23,675.

2. Coefficient de corrélation linéaire

Définition

Soit V(X) la variance de la série statistique de caractère X, V(Y) la variance de la série statistique de caractère Y et COV (X ; Y) la covariance de la série statistique (X ; Y).

On appelle coefficient de corrélation linéaire de la série statistique double (X ; Y), le nombre réel noté r tel que : $r = \frac{\text{COV(X,Y)}}{\sqrt{\text{V(X)}}\sqrt{\text{V(Y)}}}$.

Exercice de fixation

Calcule le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique du B.1.3.

Superficie X	2	2	3	4	5	6	7	7,6
Nombre d'exploitations Y	14	26	31	29	44	40	54	50

Solution

Le coefficient de corrélation linéaire $r$de cette série statistique est: $r = \frac{\text{COV(X,Y)}}{\sqrt{\text{V(X)}}\sqrt{\text{V(Y)}}}$

On a:

• $\text{V(X)} = \frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\overline{\text{X}}\right)^2 = \frac{2^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+(7{,}6)^2}{8} - 4{,}575^2$

$\text{V(X)} = \frac{200{,}76}{8} - 4{,}575^2 \approx 4{,}16$

• $\text{V(Y)} = \frac{\sum y_i^2}{n} - \left(\overline{\text{Y}}\right)^2 = \frac{14^2+26^2+31^2+29^2+44^2+40^2+54^2+50^2}{8} - 36^2$

$\text{V(Y)} = \frac{11626}{8} - 36^2 = 157{,}25$

Donc :$r = \frac{23{,}675}{\sqrt{4{,}16\times157{,}25}}$ ≈0,92.

Remarques

• Le coefficient de corrélation linéaire permet de voir la dépendance linéaire des deux caractères X et Y.

•Le coefficient de corrélation linéaire r est un nombre réel de même signe que COV (X, Y) et on a : $-1 \leq r \leq 1$.

• Si │r│ est proche de 1, c'est-à-dire en pratique : 0,87≤ $r < 1$ ou$-1 < r \leq -0{,}87$, alors on dit qu'il y a une bonne corrélation linéaire ou une forte corrélation linéaire entre les deux caractères X et Y.

Exemple
Interprète le coefficient de corrélation linéaire ci-dessus.

Solution
On a :r =0,92.
Comme 0,87≤ $r < 1$, il y a une forte corrélation entre la superficie et le nombre d'exploitations agricoles de cette région.

3. Droites de régressions

a) Propriété

Soit V(X) la variance de la série statistique de caractère X, V(Y) la variance de la série statistique de caractère Y et COV (X, Y) la covariance de X et Y.
i. Droite de régression de Yen X.
En supposant qu'il y ait une forte corrélation entre les caractères X et Y alors, la droite (D) d'équation : $y = ax + b$ où $a = \frac{\mathrm{Cov(X,Y)}}{\mathrm{V(X)}}$ et $b = \overline{y} - a\overline{x}$ est appelée la droite de régression de Yen X par la méthode des moindres carrés.
ii. Droite de régression de X en Y.
La droite (D') d'équation : $x = a'y + b'$ avec : $a' = \frac{\mathrm{Cov(X,Y)}}{\mathrm{V(Y)}}$ et $b' = \overline{x} - a'\overline{y}$ est appelée la droite de régression de X en Y par la méthode des moindres carrés.

Exercice de fixation
On considère la série statistique précédente.
On sait que : 0,87≤ $r < 1$.
1. Détermine une équation de la droite d'ajustement linéaire de Y en X par la méthode des moindres carrés. On donnera les arrondis d'ordre 2 de a et b.
2. Détermine une équation de la droite d'ajustement linéaire de X en Y par la méthode des moindres carrés. On donnera les arrondis d'ordre 2 de a' et b'.

Solution
1. C'est la droite (D) d'équation : $y = ax + b$ où $a = \frac{\mathrm{Cov(X,Y)}}{\mathrm{V(X)}}$ et $b = \overline{\mathrm{Y}} - a\overline{\mathrm{X}}$

$a = \frac{\mathrm{Cov(X,Y)}}{\mathrm{V(X)}} = \frac{23{,}675}{4{,}16} = 5{,}69$ et $b = \overline{\mathrm{Y}} - a\overline{\mathrm{X}}$ = 36 –5,69 ×4,575=9,97

Donc (D) : $y = 5{,}69x + 9{,}97$.

2. C'est la droite (D') d'équation : $x = a'y + b'$ avec $a' = \frac{\mathrm{Cov(X,Y)}}{\mathrm{V(Y)}}$ et $b' = \overline{\mathrm{X}} - a'\overline{\mathrm{Y}}$

$a' = \frac{\mathrm{Cov(X,Y)}}{\mathrm{V(Y)}} = \frac{23{,}675}{157{,}25} = 0{,}15$ et $b' = \overline{\mathrm{X}} - a'\overline{\mathrm{Y}}$ = 4,575 – 0,15×36= –0,825

Donc : (D') : $x = 0{,}15y$ −0,825.

Remarques

- Les droites (D) et (D') passent par le point moyen G du nuage de points.
- Si r est le coefficient de corrélation linéaire on a :

•$aa' = r^2$ et $|r| = \sqrt{aa'}$
• Si a> 0 et a'> 0, alors $r = \sqrt{aa'}$.
• Si a< 0 et a'< 0, alors $r = -\sqrt{aa'}$.
• Si $r^2 = 1$, alors $a = \frac{1}{a'}$ et les deux droites sont confondues.

b) Estimation

•La droite d'ajustement tracée du nuage de points permet graphiquement une estimation de y connaissant x (resp. x connaissant y).
•L'équation de la droite d'ajustement permet de calculer une estimation de y connaissant x (resp.x connaissant y).

Exercice de fixation
On considère la série statistique précédente.
En considérant que la tendance se poursuit ainsi, détermine le nombre d'exploitations agricoles pour une superficie de 9 ha.

Solution
Une superficie de 9 ha correspond à $x = 9$.
En utilisant l'équation de la droite par la méthode des moindres carrés, on a : y = 5,69 x + 9,97
$y = 5{,}69 \times 9 + 9{,}97 = 61{,}8$
Donc pour une superficie de 9 ha, le nombre d'exploitations agricoles est estimé à 62.

C. SITUATION COMPLEXE

Le tableau ci-dessous donne le nombre total d'adhérents au club littéraire d'un lycée au cours de l'année civile 2020.

Mois	Janv	Fév	Mars	Avr	Mai	Juin	Juil	Août	Sept	Oct	Nov	Déc
Rang x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre d'adhérents y_i	1100	1160	1220	1370	1620	1550	1600	1500	1790	1940	2060	1980

Une Organisation Non Gouvernementale promet d'octroyer une aide financière considérable au club si le nombre d'adhérents dépasse les 3000 élèves. L'élève de la Terminale A qui dirige le club désire connaître la date à laquelle ce don pourra se faire. Il te sollicite pour l'aider.

Détermine la date (mois et année) probable de la réception de ce don.

Solution.

- **Pour trouver la date, nous allons utiliser les statistiques à deux variables,**
- **Je détermine la droite de régression linéaire,**
- **J'estime la date.**

- **Je détermine une équation de la droite de régression de Y en X.**

Soit (D) cette droite.
Une équation de (D) est sous la forme: $y = ax + b$ $avec$ $a = \frac{\mathrm{Cov(X,Y)}}{\mathrm{V(X)}}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$.

- Les coordonnées du point moyen G
On a:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{78}{12} = 6{,}5$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{18890}{12} = 1574{,}167$$

- La variance de X

$$V(X) = \frac{\sum {x_i}^2}{n} - \overline{\mathrm{X}}^2$$

$$V(X) = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2}{12} - 6{,}5^2$$

$$\mathrm{V(X)} = \frac{650}{12} - (6.5)^2 = 11{,}917$$

- La variance de Y

$$V(Y) = \frac{\sum {y_i}^2}{n} - \overline{\mathrm{Y}}^2$$

$$V(Y) = \frac{1100^2 + 1160^2 + 1220^2 + 1370^2 + 1620 + 1550^2 + 1600^2 + 1500^2 + 1790^2 + 1940^2 + 2060^2 + 1980^2}{12} - (1574{,}167)^2$$

$$V(Y) = \frac{30889500}{12} - (1574{,}167)^2 = 96123{,}256$$

- La covariance de X et Y

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{\sum x_i y_i}{n} - \overline{\mathrm{X}}\,\overline{\mathrm{Y}}$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{1100 + 2320 + 3660 + 5480 + 8100 + 9300 + 11200 + 12000 + 16110 + 19400 + 22660 + 23760}{12} - 6{,}5 \times 1574{,}167$$

$$\mathrm{COV(X, Y)} = \frac{135090}{12} - 6{,}5 \times 1574{,}167 = 1025{,}4145$$

- Une équation de la droite (D): *y* = *ax* + *b*

$$a = \frac{1025{,}4145}{11{,}917} = 86{,}046$$

$$b = 1574{,}167 - 86{,}046 \times 6{,}5 = 1014{,}868$$

D'où (D): $\boldsymbol{y} = 86{,}046x + 1014{,}868$

- Je déduis le rang du mois pour $y = 3000$

$y = 3000$ équivaut à $x = \frac{3000 - 1014{,}868}{86{,}046} = 23{,}071$

Le rang cherché est sensiblement égal à 24.

- Je donne la date (mois et année) probable de la réception de ce don.

La date probable de la réception de ce don est Décembre 2021.

D. EXERCICES

1. Exercices de fixation

Exercice 1

On considère la série statistique suivante :

x_i	1	4	7	8	10
y_i	2	7	8	10	13

Détermine les coordonnées du point moyen G.

Solution

On a : $x_G = \bar{x} = \frac{1+4+7+8+10}{5} = \frac{30}{5} = 6$

$y_G = \bar{y} = \frac{2+7+8+10+13}{5} = \frac{40}{5} = 8$; donc G (6 ; 8)

Exercice 2

Détermine la covariance de la série statistique de l'exercice 1

Solution

On a : COV(X, Y)= $\frac{\sum n_{ij}x_iy_j}{n} - \bar{X}\bar{Y} = \frac{1\times2+4\times7+7\times8+8\times10+10\times13}{5} - 6\times 8 = \frac{296}{5} - 48 = 11{,}2$

2. Exercices de renforcement

Exercice 1

La tension artérielle est une donnée médicale correspondant à la pression du sang dans les artères. On la mesure chez les patients car une tension anormale peut être le symptôme de pathologies cardiovasculaires comme l'hypertension artérielle.

La tension artérielle d'une personne comporte deux mesures :

- la Tension Artérielle Systolique (notée TAS) ;
- la Tension Artérielle Diastolique (notée TAD).

Le tableau suivant regroupe les mesures de la tension artérielle pour un groupe de personnes saines :

Ages	26	39	40	50	53	56
TAS (en mm Hg)	128	126	118	136	142	145
TAD (en mm Hg)	80	83	92	91	87	93

On s'intéresse à l'évolution de la TAS en fonction de l'âge.

Pour cela, on symbolise les données du tableau à l'aide de points de coordonnées (x;y) où x est l'âge de la personne et y sa TAS.

Détermine les coordonnées du point moyen des 3 points dont l'âge est le plus petit.

Détermine les coordonnées du point moyen des 3 autres points.

Solution

Désignons par G_1 le point moyen des trois points dont l'âge est le plus petit et par G_2 celui des trois autres points. On a :

$$x_{G_1} = \frac{26+39+40}{3} = 35$$

$$y_{G_1} = \frac{128+126+118}{3} = 124$$

Donc $G_1(35 ; 124)$

$$x_{G_2} = \frac{50+53+56}{3} = 53$$

$$y_{G_2} = \frac{136+142+145}{3} = 141$$

Donc $G_2(53 ; 141)$

Exercice 2

On considère la série statistique suivante :

X	0	1	2	3	4		5	6	7	8
Y	160	110	100	72	36		29	20	10	3

1) Détermine la covariance de la série statistique.
2) Détermine le coefficient de corrélation linéaire de cette série. Interprète ce coefficient de corrélation linéaire.
3) Détermine une équation de la droite d'ajustement linéaire de Y en X du nuage de points de la série par la méthode des moindres carrés.
4) Détermine une équation de la droite d'ajustement linéaire de X en Y.

Solution

1) On a : $\bar{X} = \frac{0+1+2+3+4+5+6+7+8}{9} = 4$

$$\bar{Y} = \frac{160+110+100+72+36+29+20+10+3}{9} = 60$$

$$COV(X,Y) = \frac{\sum n_{ij}x_i y_j}{n} - \overline{XY} = \frac{1\times110+2\times100+3\times72+4\times36+5\times29+6\times20+7\times10+8\times3}{9} - 4\times 60 = -125{,}67$$

2) On a : : $r = \frac{\mathrm{COV(X,Y)}}{\sqrt{\mathrm{V(X)}}\sqrt{\mathrm{V(Y)}}}$; or $\mathrm{V(X)} = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2}{9} - 4^2 = 6{,}67$ et

• $\mathrm{V(Y)} = \frac{\sum y_i^2}{n} - (\bar{y})^2 = \frac{160^2+110^2+100^2+72^2+36^2+29^2+20^2+10^2+3^2}{9} - 60^2 = 2570$

Donc $r = \frac{-125{,}67}{\sqrt{6{,}67}\times\sqrt{2570}} = -0{,}96$

Comme $-1 < r \leq -0{,}87$ alors il y a une forte corrélation linéaire entre les caractères X et Y.

3) C'est la droite (D) d'équation : $y = ax + b$ où $a = \frac{\mathrm{Cov(X,Y)}}{\mathrm{V(X)}}$ et $b = \overline{\mathrm{Y}} - a\overline{\mathrm{X}}$

$a = \frac{-125{,}67}{6{,}67} = -18{,}84$ et $b = 60 + 18{,}84\times4 = 135{,}36$ donc(D) : $y = -18{,}84x + 135{,}36$

4). C'est la droite (D') d'équation : $x = a'y + b'$ avec $a' = \frac{\mathrm{Cov(X,Y)}}{\mathrm{V(Y)}}$ et $b' = \overline{\mathrm{X}} - a'\overline{\mathrm{Y}}$

$a' = \frac{-125{,}67}{2570} = -0{,}049$ et $b' = 4+0{,}049\times60 = 6{,}94$ donc (D') : $x = -0{,}049y + 6{,}94$

3. Exercice d'approfondissement

Dans le cadre d'un recensement portant sur le nombre de travailleurs dans les champs d'hévéa, un agent a visité huit (8) exploitations .Un exploitant voudrait estimer le nombre de travailleurs que prendrait une exploitation de 16ha d'hévéa. Pour cela, l'agent recenseur a recueilli les informations consignées dans le tableau ci-dessous.

Nombre x de travailleurs	2	4	4	5	7	7	8	8

Superficie exploitée y(en ha)	3	5	6	7	10	11	8	12

1) Représente le nuage de points correspondant à la série statistique double (X, Y) dans le plan muni d'un repère orthonormé.
On prendra sur l'axe des abscisses 1cm pour 1 travailleur et sur l'axe des ordonnées 1cm pour une superficie de 1ha.

Pour les questions 2) 3) 4) et 5), les résultats seront arrondis à l'ordre 2.

2) Justifie que le point moyen a pour coordonnées (5,63; 7,75).

3) On note $V(X)$ la variance de $X, V(Y)$ la variance de Y et $Cov\ (X\ ;\ Y)$ la covariance de X et Y.
Justifie que $V(X)\ =\ 4{,}18$ et $Cov\ (X, Y)\ =\ 5.57$.

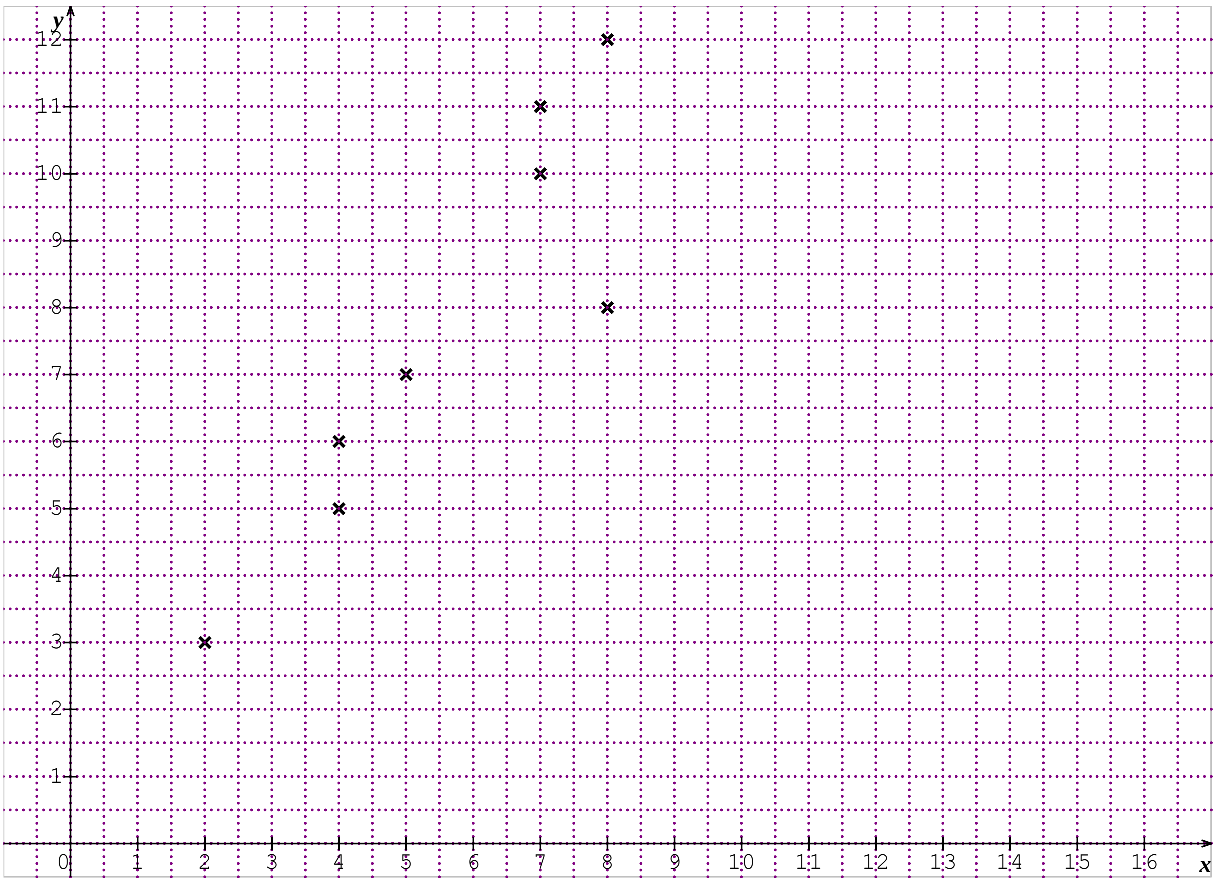
4) a) Calcule le coefficient de corrélation linéaire r de la série (X, Y).
b) Interprète le résultat obtenu précédemment.

5) a) Justifie qu'une équation de la droite (D) d'ajustement de X en Y par la méthode des moindres carrés est : y =1,28x +0,54.

b) Trace(D) sur le graphique précédent.

6) Utilise l'ajustement précédent pour répondre à la préoccupation de l'exploitant.
On donnera l'arrondi d'ordre zéro du résultat.

Solution
<u>1) Représentation du nuage de points associé à la série</u>



2) Justifions que le point moyena pour coordonnées (5,63 ;7,75).
Soit G($\bar{X}$; $\bar{Y}$)le point moyen du nuage répresentant cette série statistique.
On a :

$$\bar{X} = \frac{2+4+4+5+7+7+8+8}{8} = 5,625 \approx 5,63$$

$\bar{X} = 5,63$.

$$\bar{Y} = \frac{3+5+6+7+10+11+8+12}{8} = 7,75$$

Donc : G(5,63;7,75).

3) Justifions que V(X)=4,18, V(Y)=8 ,44 et Cov (X, Y) =5.57

$$V(X) = \frac{\sum {x_i}^2}{n} - \overline{\mathrm{X}}^2 = \frac{2^2+4^2+4^2+5^{2+}7^2+7^2+8^2+8^2}{8} - 5,63^2$$

$V(X) = 4,178$; donc V(X) =4,18.

$$V(Y) = \frac{\sum {y_i}^2}{n} - \overline{\mathrm{Y}}^2 = \frac{3^2+5^2+6^2+7^{2+}10^2+11^2+8^2+12^2}{8} - 7,75^2$$

$V(Y)$ =8,437 ; donc V(Y)=8 ,44.

$\mathrm{COV}(X,Y) = \frac{\sum x_i y_j}{n} - \overline{\mathrm{X}}\overline{Y}$.

$$COV(X,Y) = \frac{2\times3+4\times5+4\times6+5\times7+7\times10+7\times11+8\times8+8\times12}{8} - 5,63 \times 7,75.$$

$COV\ (X,Y)$ =5,37

4) a) Calculons le coefficient de corrélation linéaire r de la série (X,Y).

$$r = \frac{\mathrm{COV(X,\ Y)}}{\sqrt{\mathrm{V(X)}}\sqrt{\mathrm{V(Y)}}} = \frac{5,37}{\sqrt{4,18} \times \sqrt{8,44}}$$

$r\ = 0.904\ soit\ r = 0,90$.

b) Interprète le résultat obtenu précédemment.
On remarque que : 0,87$\leq r < 1$, ainsi, on peut conclure qu'il y a une forte corrélation entre le nombre de travailleurs et la superficie exploitée sur les 8 différentes exploitations.

5) a)Justifie qu'une équation de la droite (D) d'ajustement de X en Y par la méthode des moindres carrés est : y =1,28x+0,54

Puisqu'il y a une forte corrélation entre le nombre de travailleurs et la superficie exploitée alors

(D) a pour équation : $y = a\,x + b$ où $a = \frac{\mathrm{Cov(X,Y)}}{\mathrm{V(X)}}$ et $b = \overline{\mathrm{Y}} - a\overline{\mathrm{X}}$

$a\ = \frac{5,37}{4,18} = 1,28$ et $b\ = 7,75 - 1,28 \times 5,63 = 0,54$.

Soit (D) : $y\ =\ 1,28x\ + 0,54$.

Terminale D

Mathématiques

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Thème : Fonctions numériques

Durée : 06 heures   Code :

Leçon 12 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pendant un cours de physique-chimie dans une classe de Terminale scientifique, le professeur donne l'exercice ci-dessous à ses élèves :
« Une substance chimique se dissout dans l'eau. On admet que la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité non encore dissoute. A l'instant *t*=0 (*t* en minutes), on place 20 grammes de cette substance dans une grande quantité d'eau.
Sachant que les dix premiers grammes se dissolvent en cinq minutes, donne une expression de la quantité non dissoute *f*(*t*), en grammes, en fonction de *t*. »
Après un temps de recherche, les élèves n'arrivent pas à proposer une solution.
Le professeur leur demande donc de se faire aider par leur professeur de mathématiques. Ce dernier leur demande de traduire cette situation sous forme d'équation et de la résoudre.

B. CONTENU DE LA LECON

I. Notion d'équation différentielle

1. Définition
On appelle **équation différentielle**, toute équation ayant pour inconnue une fonction et dans laquelle figure au moins une des dérivées successives de la fonction inconnue.

Exemple
$(E_1): -2f' + 5f = 0$; $(E_2): f'' - 25f = 2x + 1$

(E_1) et (E_2) sont des équations différentielles avec comme inconnue la fonction *f*.

Remarques
•Toute autre lettre désignant une fonction peut être utilisée à la place de *f*.
• Résoudre une équation différentielle sur un intervalle K, c'est déterminer l'ensemble des fonctions définies sur K qui sont solutions de cette équation différentielle.

N.B.
Dans la suite du cours, nous utiliserons ***y*** comme fonction inconnue dans les équations différentielles.

2. Exercices de fixation

Exercice 1
Parmi les équations suivantes, indique celles qui sont des équations différentielles.

1) $(E): 2y^2 + y = 2$; 2)$(E): y' + 4 = 0$; 3) $(E): y^2 = 1$;
4) $(E): y'' + 2y' + y = 5$; 5) $(E): y + 3 = 0$.

SOLUTION
Les équations différentielles sont : 2) (E) : $y' + 4 = 0$ et 4) (E) : $y'' + 2y' + y = 5$.

II. Résolution de quelques équations différentielles

1. Équations du type : $y' + ay = b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

a) Cas où b = 0
L'équation devient : $y' + ay = 0$, $a \in \mathbb{R}$

Propriété1
Les solutions sur $\mathbb{R}$ **de l'équation différentielle**: $y' + ay = 0$, $a \in \mathbb{R}$, sont les fonctions :
$x \longmapsto ke^{-ax}$, $k \in \mathbb{R}$.

Exercice de fixation
Résous sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :
1) $y' + 2y = 0$ 2) $7y' = 3y$

SOLUTION
1) Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions : $x \longmapsto ke^{-2x}$, $k \in \mathbb{R}$.
2) Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions : $x \longmapsto ke^{\frac{3}{7}x}$, $k \in \mathbb{R}$

b) Cas où b ≠ 0
L'équation différentielle devient : $y' + ay = b$, $a \in \mathbb{R}*$, $b \in \mathbb{R}*$
Propriété 2
Les solutions sur $\mathbb{R}$ **de l'équation différentielle**: $y' + ay = b, a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}^*$, sont les fonctions :
$x \longmapsto ke^{-ax} + \frac{b}{a}$, $k \in \mathbb{R}$.

Exercice de fixation
Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :$y' + 2y = 6$.

SOLUTION
Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions : $x \longmapsto ke^{-2x} + 3$, $k \in \mathbb{R}$
car a=2 et b =6.

Propriété 3 (Solution vérifiant une condition initiale)
Pour tout couple (x_0 ;y_0) de nombres réels, l'équation différentielle : $y' + ay = \mathrm{b}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur y_0 en x_0 (c'est-à-dire telle que : $y(x_0) = y_0$)

Exercice de fixation
On donne l'équation différentielle (E): $y' - 3y = 7$.
Détermine la solution f de (E) qui vérifie : $f(0) = 1$.
Solution
Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions : $x \longmapsto ce^{3x} - \frac{7}{3}$, $c \in \mathbb{R}$.
f étant une solution de (E), $f(x) = ce^{3x} - \frac{7}{3}$, $c \in \mathbb{R}$.
$$f(0) = 1 \Leftrightarrow ce^{3\times 0} - \frac{7}{3} = 1 \Leftrightarrow c - \frac{7}{3} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{10}{3}$$

Donc la solution f de (E)qui vérifie : $f(0) = 1$est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \frac{10}{3}e^{3x} - \frac{7}{3}$
c) cas où $a = 0$

l'équation devient : $y' = b$. Ses solutions sont les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto b$,

qui sont les fonctions $x \longmapsto bx + c, c \in \mathbb{R}$

2. Équations du type : $\boldsymbol{y'' + my = 0}$, $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R}$

a) Cas où $\boldsymbol{m = 0}$

L'équation devient :$y'' = 0$.

Propriété
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $\boldsymbol{y'' = 0}$ sont les fonctions :
$x \longmapsto ax + b$, $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.

b) Cas où $\boldsymbol{m < 0}$
On pose : $m = -\omega^2, \omega \in \mathbb{R}^*$.
L'équation devient $y'' - \omega^2 \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, $\omega \in \mathbb{R}^*$.

Propriété
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $\boldsymbol{y'' - \omega^2 y = 0}$, $\omega \in \mathbb{R}^*$ sont les fonctions :
$x \longmapsto ae^{-\omega x} + be^{\omega x}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Exercice de fixation
Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :$y'' - 4y = 0$.

SOLUTION
$y'' - 4y = 0$ d'où $\omega^2 = 4 \Leftrightarrow \omega = 2$ ou $\omega = -2$
Donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation sont les fonctions : $x \longmapsto ae^{-2x} + be^{2x}$,$a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

c) Cas où $\boldsymbol{m > 0}$
On pose :$m = \omega^2$, $\omega \in \mathbb{R}^*$.
L'équation devient : $\boldsymbol{y'' + \omega^2 y = 0}$, $\omega \in \mathbb{R}^*$.

Propriété
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $\boldsymbol{y'' + \omega^2 y = 0}$, $\omega \in \mathbb{R}^*$ sont les fonctions :
$x \longmapsto a\cos(\omega x) + b\, sin\, (\omega x)$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Exercice de fixation
Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :$y'' + 4y = 0$.

Solution
$y'' + 4y = 0 \Leftrightarrow y'' + 2^2y = 0$ $avec$ $\omega^2 = 2^2. \Leftrightarrow \omega = 2$ ou $\omega = -2$
Donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation sont les fonctions : $x \longmapsto a\, cos 2x + b\, sin\, 2x$,$a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Propriété (Solution vérifiant des conditions initiales)

Pour tout triplet (x_0 ; y_0 ; z_0) de nombres réels, l'équation différentielle : $y'' + my = 0$, $m \in \mathbb{R}$, admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ telle que : $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z_0$.

Exercice de fixation

1. Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'' + 25y = 0$.
2. Détermine la solution f de (E) qui vérifie : $f(0) = 1$ et $f'\left(\frac{\pi}{5}\right) = -2$.

SOLUTION

1. $y'' + 25y = 0 \Leftrightarrow y'' + 5^2y = 0$.

Donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) sont les fonctions:

$x \longmapsto a\cos(5x) + b\sin(5x)$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

2. f étant une solution de (E), $f(x) = a\cos(5x) + b\sin(5x)$ et $f'(x) = -5\,a\sin(5x) + 5b\cos(5x)$.

•$f(0) = 1 \Leftrightarrow a\cos(0) + b\sin(0) = 1 \Leftrightarrow a = 1$

•$f'\left(\frac{\pi}{5}\right) = -2 \Leftrightarrow -5a\sin(\pi) + 5b\cos(\pi) = -2 \Leftrightarrow -5b = -2 \Leftrightarrow b = \frac{2}{5}$

D'où la solution f de (E) *est définie par* : $f(x) = \cos(5x) + \frac{2}{5}\sin(5x)$.

3. Tableau récapitulatif

Types d'équations différentielles	Fonctions solutions
$y' + ay = 0$, $a \in \mathbb{R}$	$x \longmapsto ke^{-ax}$, $k \in \mathbb{R}$
$y' + ay = b$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}^*$	$x \longmapsto ke^{-ax} + \frac{b}{a}$, $k \in \mathbb{R}$
$y'' = 0$	$x \longmapsto ax + b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$
$y'' - \omega^2 y = 0$, $\omega \in \mathbb{R}^*$	$x \longmapsto ae^{-\omega x} + be^{\omega x}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$
$y'' + \omega^2 y = 0$, $\omega \in \mathbb{R}^*$	$x \longmapsto a\cos\omega x + b\sin\omega x$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

C- SITUATION COMPLEXE

Lors d'une campagne innovante du Fonds des Nations Unies pour la population intitulée « 7 Milliards d'Actions », qui mettait l'accent sur les défis, les possibilités et les actions nécessaires à notre avenir commun sur la Terre, les élèves de la promotion terminale d'un lycée ont appris que :

- plus de la moitié de la croissance démographique dans le monde d'ici à 2050 aura lieu en Afrique ;
- la population d'Afrique subsaharienne, par exemple, devrait doubler d'ici à 2050 ;
- selon les projections, la population mondiale devrait augmenter de 2 milliards de personnes au cours des trente prochaines années, passant de 7,7 milliards actuellement à 9,7 milliards en 2050 ;
- la population d'un pays était de 4, 75 millions d'habitants en 1990 et de 5,5 millions d'habitants en 1995.

Etonnés du boum démographique de ce pays, ces élèves veulent déterminer l'année où la population de ce pays atteindra 20 millions d'habitants, si on suppose que la vitesse d'accroissement de la population est proportionnelle au nombre d'habitants. Ils désignent par $f(t)$ le nombre de millions d'habitants à l'instant t.

Ayant entendu ces informations, tu veux tester tes connaissances et aussi les aider.

Réponds, dans ces conditions, à la préoccupation de ces élèves.

SOLUTION

- **Pour répondre à la préoccupation de ces élèves, je vais utiliser les équations différentielles ;**

- **Je vais déterminer l'année où la population atteindra les 20 MIILLIONS.**
  <u>Modélisation</u>
  - **Détermination de l'équation différentielle :**

L'hypothèse la vitesse d'accroissement de la population est proportionnelle au nombre d'habitants se traduit par : f'(t)= a f(t) où a ≠0
Ainsi, il est question de trouver une f, dérivable sur [0 ; +∞[telle que pour tout t ≥ 0 ;
f'(t)= a f(t) et f(0) =4,75 ; on prend t=0 pour l'année 1990 comme année d'origine

- Résolution de l'équation $y' = ay$.

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions f définies sur [0 ; +∞[par : $x \longmapsto ke^{at}$, k∈ ℝ :

Comme f(0)= 4,75 alors ke^0= 4,75 d'où k= 4,75 ainsi f(t) = 4,75 e^{at}

D'autre part de 1990 à 1995, on a t = 5 alors f(5)=5,5 ; ce qui donne 4,75 e^{5a}= 5,5 donc a = $\frac{ln\frac{22}{19}}{5}$

Par conséquent, f(t)= 4,75 $e^{\frac{ln\frac{22}{19}}{5}t}$

Pour f(t)= 20 on a : 4,75 $e^{\frac{ln\frac{22}{19}}{5}t}$ = 20 d'où t =$\frac{5ln\frac{80}{19}}{ln\frac{22}{19}}$ ~= 48 donc ce pays atteindra 20 millions d'habitants en 1990+48 = 2038.
Conclusion :

D. Exercices

1. Exercices de fixation

Exercice 1

Parmi les équations suivantes, indique celles qui sont des équations différentielles :
(E) : y² +y =2 ; (F) : y'-ln2y = 3 ; (G) : y'' –y' =3x² ; (H) : y = 3x
solution
Les équations (F) et (G) sont des équations différentielles

Exercice 2

Pour chacune des équations différentielles suivantes, détermine la solution vérifiant la condition donnée :
a. $y' = -2y$, $f(0) = 1$.
b. $y' - (ln2)y = 0$, $f(2) = \frac{1}{2}$.

solution

a. Les solutions sont les fonctions f définies sur ℝ par f(x)= k e^{-2x} , k ϵℝ
Comme f(0)= 1 alors on a : k e^0= 1 ⟺k = 1, donc la solution f qui vérifie f(0)=1 est la fonction f définie sur ℝ par : f(x) = e^{-2x}

b. Les solutions sont les fonctions f définies sur ℝ par f(x)= k e^{xln2} , k ϵℝ

Comme f(2)= $\frac{1}{2}$ alors on a : k e^{2ln2} = $\frac{1}{2}$ ⟺ ke^{ln4} = $\frac{1}{2}$ ⟺ 4k = $\frac{1}{2}$ ⟺ k = $\frac{1}{8}$, donc les la fonction f qui vérifie f(2)= $\frac{1}{2}$ est la fonction f définie sur ℝ par f(x)= $\frac{1}{8}$ e^{xln2}

2. Exercices de renforcement

Exercice 1

Soit θ la température d'un corps à l'instant t. La température ambiante est 30°C.

A chaque instant$t$, on pose : $x(t) = \theta(t) - 30$. On suppose que la fonction x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $x' = -k^2x$ ($k \in \mathbb{R}^*$). A l'instant$t = 0$, la température de ce corps est 70°C et au bout de 5 minutes, elle n'est plus que de 60°C.
1) Détermine$\theta(t)$, où t est mesuré en minutes.
2) Détermine la température de ce corps au bout de 20 minutes.

Solution

1) On a : θ(t)= x(t) +30 ; or x'(t) = -k²x d'où x(t) = c e^{-k^2t} , c$\epsilon\mathbb{R}$ par suite $\theta(t) = c\ e^{-k^2t}$+30
   Comme θ(0)= 70 alors c= 70-30=40 et θ(5)= 60 alors –k² = $\frac{1}{5}\ln\frac{3}{4}$ donc $\theta(t) = 40e^{\frac{1}{5}ln\frac{3}{4}t}$+30.
2) Pour t= 20, on a : θ(20)= 42,66° , donc la température de ce corps au bout de 20mn est 42,66°.

Exercice 2

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle(E) : $y' + 2y = e^{-2x}$.
1. Vérifie que la fonction g telle que $g(x) = (x + 1)e^{-2x}$ est une solution de(E).
2. Démontre qu'une fonction $h + g$ est solution de (E)si et seulement si la fonction h est solution de l'équation différentielle(E'): $y' + 2y = 0$.
3. Détermine les solutions sur $\mathbb{R}$de l'équation différentielle(E').
4. a) Déduis des questions précédentes, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle(E).
   b) Détermine la solution f de(E) vérifiant la condition$f(0) = -2$.

Solution

1. On a : g'(x)+2g(x) = (-2x-1)e^{-2x}+2(x+1)e^{-2x}= e^{-2x} donc g est une solution de (E).
2. On a : h+g solution de (E) $\Leftrightarrow$ (h+g)' +2(h+g) = e^{-2x}
   $\Leftrightarrow$h' +2h =0 car g'+2g = e^{-2x}
   Par suite, h est solution de l'équation différentielle (E') : y'+2y=0
3. Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions h définies sur $\mathbb{R}$ par h(x)= ke^{-2x}, k$\epsilon\mathbb{R}$
4. a) Ainsi les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$
   Par f(x)= ke^{-2x}+(x+1) e^{-2x} = (k+x+1) e^{-2x}
   b) On a: f (0) = 1 $\Leftrightarrow$ (k+1) e^0= 1 $\Leftrightarrow$k=0 donc f(x) = (x+1) e^{-2x}

3. **Exercice d'approfondissement**
   Exercice

On considère l'équation différentielle(E) : $y' + 3y = 2e^{-x}$.
1. Détermine le nombre réel m pour que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = me^{-x}$ soit solution de(E).
2. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E'): $y' + 3y = 0$.
3. Démontre qu'une fonction $h - g$ est solution de (E') si et seulement si la fonction g est solution de (E).
4. Déduis des questions précédentes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle(E).

Solution

1.Déterminons le nombre réel m pour que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = me^{-x}$soit solution de (E) : $y' + 3y = 2e^{-x}$. $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $h(x) = me^{-x}$ et $h'(x) = -me^{-x}$
h est solution de $(E) \Leftrightarrow h'(x) + 3h(x) = 2e^{-x}$
$\Leftrightarrow -me^{-x} + 3me^{-x} \Leftrightarrow 2me^{-x} = 2e^{-x}$
$\Leftrightarrow m = 1$
Donc la fonction h définie par :$h(x) = e^{-x}$est solution de (E).

2. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E'): $y' + 3y = 0$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E') : $y' + 3y = 0$ sont les fonctions :
$x \mapsto ke^{-3x}$, $k \in \mathbb{R}$.
3. On a : h-g solution de (E') ⟺ (h-g)' +3(h-g) =0⟺h'+3h –(g'+3g)=0 , or h+3h = $2e^{-x}$
Donc g' +3g = $2e^{-x}$; par suite g est solution de l'équation (E).

4. Les solutions de (E) sont les fonctions définies sur par : x⟼ e^{-x}-ke^{-3x} ,k$\in\mathbb{R}$

V. Documents

Collection IRMA TCE
Collection Trans-Math Term ES
Collection SCIAM Terminale SE
Collection SCIAM Terminale SM